This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

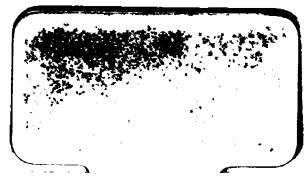
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Die

Grundlehren

der ebenen

analytischen

oder

Coordinatengeometrie;

mit vielen Uebungsaufgaben.

Für höhere Lehranstalten, angehende Mathematiker und Techniker.

Von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit Figurentafeln.

Stuttgart.
Verlag der Chr. Belser'schen Buchhandlung.
1852.

If 3. α. 46.

173 x. 45.

Vorwort.

Der Zweck dieſes Werkchens iſt: dem angehenden Mathematiker und Techniker eine möglichſt einfache und elementare, aber ſtreng wiſſenſchaftliche Anleitung zu den Grundlehren der analytiſchen oder Coordinatengeometrie zu geben, welche nicht blos eine an ſich höchſt intereſſante, ſondern für das Studium der theoretiſchen und techniſchen Mechanik, der Aſtronomie ꝛc. ꝛc. ganz unentbehrliche Wiſſenſchaft iſt, und deshalb einen Hauptzweig des geſammten höhern mathematiſchen Unterrichtes bildet.

Die gewöhnlichen ältern Lehrbücher von Biot, Lacroix, Ohm, ꝛc. enthalten von den bedeutenden neuern Fortſchritten der Wiſſenſchaft faſt keine Spur, während ſich die großen klaſſiſchen Werke von Poncelet, Plücker, Magnus, ꝛc. zum Studium für Anfänger nicht wohl eignen. Zwiſchen dieſen beiden Klaſſen von Werken ſoll das vorliegende gewiſſermaßen die Mitte halten, und außer den gewöhnlichen Lehren auch das Weſentlichſte von den neuern Fortſchritten der höhern Geometrie: von den Polen und Polaren, von dem anharmoniſchen Verhältniß, von der Homographie oder Collineationsverwandtſchaft, ꝛc. ꝛc. mit Anwendungen, beſonders auf die Curven und Flächen des zweiten Grades, darbieten.

Da es nicht zweckmäßig gewesen wäre: die vollständige Kenntniß der höhern Analysis in dem vorliegenden Werkchen bei dem Leser vorauszusetzen, und andererseits doch die wichtigsten Untersuchungen der analytischen Geometrie wenigstens die Grundbegriffe jener Wissenschaft, d. h. die Lehre von den Grenzen veränderlicher Verhältnisse, oder von den abgeleiteten Funktionen als bekannt voraussetzen; so sind die zum Verständniß des Werkchens erforderlichen Grundzüge jener Lehre in einem besondern Anhange näher entwickelt, so daß der Anfänger in dieser Beziehung auf kein Hinderniß stoßen wird, wenn er sich zuvor mit dem Inhalte dieses Anhanges bekannt macht.

Die reine Theorie ist immer durch Beispiele erläutert, und endlich sind viele Uebungsaufgaben hinzugefügt.

Das ganze Werkchen wird aus zwei Theilen bestehen, wovon der vorliegende erste Theil die Geometrie in der Ebene enthält, und der zweite die Geometrie im Raume enthalten wird. — Uebrigens bildet jeder dieser beiden Theile ein für sich bestehendes Ganzes.

Heidelberg, 1852.

Dr. C. H. Schnuse.

Inhaltsverzeichniſs.

Erſtes Kapitel.

Von den Coordinatenſyſtemen.

§.§.		Seite.
1	Paralleles Coordinatenſyſtem	1
2	Polarcoordinatenſyſtem	2
3	Bipolarſyſtem	—
4	Allgemeines Coordinatenſyſtem	2— 3
5	Darſtellung ebener Linien durch Gleichungen	3— 4
6	Beſtimmung der Gleichungen der Linien	4— 6
7	Transformation der Coordinaten	6— 9
8	Bemerkung über das Polarſyſtem	9— 11
9	Uebungsaufgaben zur Ableitung der Gleichungen der Curven aus ihren geometriſchen Eigenſchaften	11— 16

Zweites Kapitel.

Allgemeine Transformation der parallelen oder geradlinigen Coordinaten.

10	Vorerinnerungen	16
11	Verlegung des Anfangspunktes	16— 17
12	Richtungsänderung der Axen	17— 19
13	Allgemeine Coordinatenverwandlung	19
14	Gegenſeitige Entfernung zweier Punkte	—
15	Allgemeine Gleichung einer Curvengattung	20— 23
16	Claſſification der Linien	23— 24

Drittes Kapitel.

Unterſuchung der Linien des erſten Grades.

17	Conſtruction der Gleichung des erſten Grades . . .	25— 26
18	Gleichung einer Geraden	26— 29
19	Andere Formen der Gleichung einer Geraden	29— 30
20	Allgemeine Gleichung der durch einen Punkt (x', y') gehenden Geraden	30—
21	Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt (x', y') geht und mit der Axe der x einen gegebenen Winkel α bildet	31
22	Gleichung einer durch zwei Punkte (x', y'), (x', y'') gehenden Geraden	31— 32
23	Parallelismus und Perpendikularität zweier Geraden .	32— 33
24	Durchſchnittspunkt zweier Geraden	33— 34
25	Winkel zweier Geraden	34— 35
26	Länge des Perpendikels von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade	35— 36
27	Länge L einer Geraden, welche mit der Axe der x einen Winkel ϑ bildet und von einem gegebenen Punkte (h, k) nach einer gegebenen Geraden $Ax+By+C=o$ gezogen iſt	36— 37
28	Gleichung einer Geraden, welche mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel φ bildet	37

§§.		Seite.
29	Gleichung der Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt zweier gegebener Geraden geht	37
30	Winkel zweier Richtungen	38
31	Polargleichung einer Geraden	—
32	Aufgaben und Lehrsätze zur Uebung	39— 46
33	Harmonische Proportion	46
34— 35	Harmonisches Strahlenbüschel	47— 52
36	Mittelpunkt der proportionalen Abstände	52— 54
37	Anwendung auf das Dreieck	54— 55
38— 40	Transversalen	55— 58
	Uebungsaufgaben	58— 60

Viertes Kapitel.

Construction verschiedener Gleichungen.

41	Construction der binomischen Gleichungen	60— 63
42	Construction der Gleichung $y \pm \frac{c+x}{x}\sqrt{a^2-x^2}$	62
43	Construction d. Gleichung: $(y^2+x^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=a^4-c^4$	63— 64
44	Construction d. Gleichung $y=x\pm\frac{2}{x^2}\sqrt{x^3+2x^2-5x-6}$.	64— 65
45	Construction der Gleichung $y=\pm\sqrt{\frac{(x-a)(x-b)}{x+a}}$ . .	65
46	Construction d. Gleichung $(4x+3y-3)-25(x+7y-7)=0$	65— 66
47	Construction der Gleichung $y^3-3axy+x^3=0$ . . .	66
48— 49	Reduction d. allgemeinen Gleichung einer Curvengattung	66— 69
50	Construction der Curven, deren Gleichungen in Polarcoordinaten gegeben sind	69— 71
51— 52	Construction transcendenter Curven	71— 72
53	Uebungsaufgaben	72— 74

Fünftes Kapitel.

Tangenten im Parallelcoordinatensysteme.

54— 56	Allgemeine Gleichung der Tangente, wenn die Gleichung der Curve von der Form $y=t(x)$ oder $f(x_1 y)=0$ ist	74— 78
57	Gleichung der Normale. Länge der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale	78— 80
58— 59	Größte und kleinste Ordinaten	80— 83
60	Concavität und Convexität	83— 84
61— 62	Inflexions- oder Wendepunkte	84— 88
63	Tangente einer durch zwei Gleichungen mit drei Veränderlichen ausgedrückten Curve	88— 89
64	Durch einen außerhalb der Curve gegebenen Punkt P gezogene Tangente	90— 91
65	Tangente, welche zu einer gegebenen Geraden parallel ist	92
66	Gemeinschaftliche Tangente an zwei gegebenen Curven.	92— 93
67	Gemeinschaftliche Tangente an zwei Zweigen derselben Curve	93— 94
68	Berührungsbedingung zwischen zwei Curven	94— 95
69	Geometrischer Ort, welchen ein Punkt beschreibt, der mit einer beweglichen, stets zwei feste gegebene Curven berührenden Curve fest verbunden ist	95— 96

§.§.		Seite.
	Sechstes Kapitel.	
	Tangenten in verſchiedenen Coordinatenſyſtemen.	
70— 71	Im Polarſyſteme	97—101
72	Im Bipolarſyſteme	101—102
73	Im Pol-Richtlinienſyſteme	102—103
74	Im allgemeinen Syſteme	103—104
	Siebentes Kapitel.	
	Von den Aſymptoten.	
75	Definition der Aſymptoten	104—105
76	Aſymptoten, welche zu der Axe der y parallel ſind	105—106
77— 78	Aſymptoten, welche nicht zu der Axe der y parallel ſind	106—109
79	Bemerkungen	109—110
80	Aſymptoten als Grenzen der Tangenten	110—111
81— 82	Lage der Curve gegen die Aſymptote	111—113
83	Aſymptoten im Polarſyſteme	113—115
—	Uebungsaufgaben	115—117
	Achtes Kapitel.	
	Von den Einhüllungs- oder Grenzcurven.	
84	Definition derſelben	117—118
85— 86	Gleichung derſelben	118—120
	Uebungsaufgaben	121—122
87	Tangentialcoordinatenſyſtem von Plücker u. Chasles	122—123
	Neuntes Kapitel.	
	Von der Krümmung und den Evoluten der Curven.	
88	Definition der Krümmung — Krümmungskreis — Krümmungsmittelpunkt	124
89	Beſtimmung des Krümmungskreiſes	125—128
	Uebungsaufgaben	128—129
90	Normalen durch einen nicht auf der Curve liegenden Punkt	129—130
91	Evoluten	130—132
	Zehntes Kapitel.	
	Von den Mittelpunkten.	
92	Definition des Mittelpunktes	133
93	Anfangspunkt als Mittelpunkt	134—135
94	Beſtimmung des Mittelpunktes	136—138
95	Eigenſchaften der Curven mit einem Mittelpunkte	138
	Elftes Kapitel.	
	Von den Durchmeſſern.	
96	Definition des Durchmeſſers	139
97	Beſtimmung der Gleichung des Durchmeſſers	139—142
98	Ort des Mittelpunktes der mittlern Entfernungen	142—143
	Zwölftes Kapitel.	
	Von den Axen.	
99	Definition der Axe	143
100	Die Abſciſſenaxe als Axe der Curve	145

§.§.		Seite.
101	Bestimmung der Axen	145—147
102	Axen der Curven des zweiten Grades	147
103	Uebersicht des Frühern	148—152
	Uebungsaufgaben	152

Dreizehntes Kapitel.

Von den zur Bestimmung einer Curve einer gegebenen Gattung erforderlichen Bedingungen.

104	Anzahl dieser Bedingungen — verschiedene Arten derselben — Reduction der Anzahl der Parameter	152—155

Vierzehntes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit.

106	Homothetie	155—156
107	Eigenschaften d. direkten u. inversen homothetischen Figuren	156—159
108	Gleichung homothetischer Curven	159—160
109	Gleichung ähnlicher Curven	160—161
110	Allgemeine Bedingungen der Aehnlichkeit zweier Figuren	161—163

Fünfzehntes Kapitel.

Construction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen.

111	Vorbemerkungen	163—164
112	Ellipsen	164—166
113	Hyperbeln	166—167
114	Parabeln	167
115	Uebersicht — Tangenten — Asymptoten — Uebungsaufgaben	168—172

Sechzehntes Kapitel.

Reduction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen.

116	Fortschaffung des Gliedes Bxy	172
117	Wegschaffung der Glieder Dx, Ey	173
118	Construction der Curven des zweiten Grades	174—181

Siebzehntes Kapitel.

Construction der reducirten Gleichungen des zweiten Grades.

119—125	Ellipsen — Hyperbeln und Parabeln	181—190
	Uebungsaufgaben	190

Achtzehntes Kapitel.

Von den conjugirten Durchmessern.

126—127	Conjugirte Durchmesser in der Ellipse — conjugirte Durchmesser als Coordinatenaxen	191—193
128—130	Conjugirte Durchmesser in der Hyperbel	193—196
131	Durchmesser in der Parabel	196
132—133	Eingeschriebene Winkel — Supplementarsehnen	196—198
	Uebungsaufgaben	198

Neunzehntes Kapitel.

Von den Polen und Polaren.

134	Definitionen	199

§§.		Seite.
135 - 136	Eigenschaften der Polaren	199—202
137	Umschriebenes Viereck	202
	Anwendungen	203
138	Reciproke Polarsysteme	203—205
139	Pascals Sechseck	205—207
140	Correlativer Satz	207—208
141	Eingeschriebenes Sechseck	208
142	Umschriebenes Sechseck	208—209
143	Anwendungen auf die Construction von Curven des zweiten Grades	210—211

Zwanzigstes Kapitel.

Theorie der Brennpunkte.

144	Definitionen	211
145	Bestimmung der Brennpunkte und Richtlinien	212—214
146	Eigenschaften der Brennpunkte	215—216
147	Richtkreis	216
148	Weitere Eigenschaften der Brennpunkte	216—218
	Uebungsaufgaben	218—219
149—150	Verallgemeinerung des Vorhergehenden	219—223
150 a.	Homofocale Curven	223—224
150 b.	Eigenschaften derselben	224—226
151	Homofocale Parabeln	226—227
	Uebungsaufgaben	227

Einundzwanzigstes Kapitel.

Symbolische Geometrie.

151	Imaginäre Punkte	227
152	Imaginäre Längen	228—229
153	Imaginäres Dreieck	229
154	Imaginäre Winkel	230—231
155	Imaginärer Kreis	231
156	Imaginäre Tangenten	232—233
157	Durchschnitt zweier Curven des zweiten Grades	233—234
158	Curven des zweiten Grades, welche 4 Gerade berühren	234—237
159	Curven des zweiten Grades, welche eine doppelte Berührung haben	237

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Anharmonisches Verhältniß.

160—161	Definition	237—239
162	Involution	239—241

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Homographie oder Collineationsverwandtschaft.

163	Definitionen	—
	Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier homographischer Systeme	241—243
164	Nutzen der Homographie	243—246
165	Conjugirte Gerade	246
167—170	Rotirende Vielecke	248—254

§.§.		Seite.
	Vierundzwanzigſtes Kapitel.	
	Homologie.	
171	Definitionen	254
172	Conſtruction einer homologiſchen Figur	255—256
173	Homologie zweier Curven des zweiten Grades . . .	256—257
174	Homologie zweier reeller Curven des zweiten Grades .	257—259
175	Curven des zweiten Grades, welche ſich berühren, oder einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt haben	259—261
176—177	Homothetiſche Curven des zweiten Grades	261—162
178	Perſpektiviſche Projektion	264 - 265
	Fünfundzwanzigſtes Kapitel.	
	Correlative Figuren.	
179	Definition	265—266
180	Correlative Curven	266—269
183	Gegenſeitige oder reciproke Correlation	—
183	Anwendungen	270—271
184	Ueberblick — Uebungsaufgaben	271—273
	Sechsundzwanzigſtes Kapitel.	
	Theorie der Transverſalen.	
185	Theorie für algebraiſche Curven	274
186	Anwendung auf Kegelſchnitte	275
187	Conſtruction der Tangente	276
188	Conſtruction des Osculations- oder Krümmungskreiſes .	276
189	Osculations- oder Krümmungskreis eines Kegelſchnittes .	277
	Siebenundzwanzigſtes Kapitel.	
	Conſtruction von Kegelſchnitten nach gewiſſen Bedingungen.	
190	Vorbemerkungen	278
191	Conſtruction eines Kegelſchnittes, welcher durch 4 gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt .	279
192	Conſtruktion eines Kegelſchnittes, welcher 4 gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht .	279
193	Conſtruction eines Kegelſchnittes, welcher durch 3 gegebene Punkte geht und 2 gegebene Gerade berührt .	280
194	Conſtruction eines Kegelſchnittes, welcher durch 2 gegebene Punkte geht und 2 gegebene Gerade berührt .	280
195	Bemerkung über die Hyperbel	—
196	Conſtruction einer Parabel, welche durch 4 gegebene Punkte geht	281
197	Conſtruction einer Parabel, welche 3 gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht . . .	282
198	Conſtruction einer Parabel, welche durch 3 gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt . . .	282
199	Conſtruction einer Parabel, welche 2 gegebene Gerade berührt und durch 2 gegebene Punkte geht	283
	Anhang.	
	Grundbegriffe der Theorie der abgeleiteten Funktionen .	284

Coordinatengeometrie in der Ebene.

Erſtes Kapitel.

Von den Coordinatenſyſtemen.

§. 1.

Paralleles Coordinatenſyſtem.

Wenn man in einer Ebene zwei ſich unter irgend einem Winkel durchſchneidende gerade Linien X_1X und Y_1Y (Fig. 1), Aren genannt, zieht, ſo wird die Lage eines beliebigen Punktes M dieſer Ebene offenbar vermittelſt des Durchſchnittes der beiden Parallelen P_1P und Q_1Q zu dieſen Aren beſtimmt, indem die Lage dieſer Parallelen ſelbſt durch ihre Abſtände OB, OA von den Aren X_1X, Y_1Y beſtimmt wird, und dieſe Abſtände als poſitiv, oder negativ betrachtet werden, jenachdem ſie auf den Halbaren OY, OX, oder auf den Halbaren OY_1, OX_1 genommen ſind. — Die Abſtände (Längen, Strecken) OA, OB, welche die Lage der beiden Parallelen Q_1Q und P_1P beſtimmen, und folglich auch die Lage des Punktes M, heißen die Coordinaten dieſes Punktes. Man bezeichnet ſie gewöhnlich reſp. mit x und y, und nennt ſie reſp. die Abſciſſe und Ordinate des Punktes M, welchen man auch oft durch (x, y) bezeichnet. — Der Punkt M kann alſo bei denſelben Zahlenwerthen a, b ſeiner Coordinaten x, y vier verſchiedene Lagen M_1, M_2, M_3, M_4 (Fig. 2) haben, jenachdem $x = +a$, $y = +b$; $x = -a$, $y = +b$; $x = -a$, $y = -b$; $x = +a$, $y = -b$ iſt. — Die beiden feſten Geraden X_1X, Y_1Y heißen die Coordinatenaren, und zwar die erſte die Are der x oder der Abſciſſen und die zweite die Are der y oder der Ordinaten — und endlich heißt der Punkt O, von welchem aus die Coordinaten auf den beiden Aren genommen oder gezählt werden, der Anfangspunkt der Coordinaten.

Wenn man x und y ſich ſtetig von $-\infty$ bis $+\infty$ ändern läßt, ſo erhält man offenbar alle Punkte der Ebene.

Im Allgemeinen bilden die Coordinatenaxen einen beliebigen Winkel — und wenn dieſer Winkel ein rechter iſt, ſo heißt das Coordinatenſyſtem ein rechtwinkliges oder orthogonales.

§. 2.

Polarcoordinatenſyſtem.

Wenn O (Fig. 3) ein feſter Punkt, der Pol genannt, und OX eine feſte Axe iſt, ſo kann man offenbar die Lage eines beliebigen Punktes M der Ebene durch die Länge ϱ des Radiusvectors OM und durch den Winkel ϑ beſtimmen, welchen dieſer Radiusvector mit der Axe OX bildet, indem der Winkel ϑ in dem Sinne von OX gegen OY gezählt wird. Wenn man ϱ ſich von o bis ∞ und ϑ in dem Intervalle einer ganzen Umdrehung von 0° bis 360° ſtetig ändern läßt; ſo erhält man alle Punkte der Ebene.

§. 3.

Bipolarſyſtem.

Man kann die Lage eines Punktes M (Fig. 4) auch durch ſeine Abſtände $OM = u$, $O_1M = v$ von zwei Polen O, O_1 beſtimmen, wobei ſeine Lage mittelſt des Durchſchnittes zweier mit den Halbmeſſern u, v beſchriebener Kreiſe beſtimmt wird. Allein dieſes Coordinatenſyſtem iſt in theoretiſcher Beziehung nicht ſo vollkommen, als die beiden vorhergehenden; denn zunächſt iſt nicht jedes Werthepaar von u und v zuläſſig, weil die gegenſeitige Entfernung OO_1 der beiden Pole kleiner als $u + v$ und größer als $u - v$ ſeyn muß (wenn $u > v$ geſetzt wird), und wenn dieſe Bedingung erfüllt wird; ſo ſchneiden ſich die beiden mit den Halbmeſſern u, v beſchriebenen Kreiſe in zwei Punkten M und M_1, wodurch eine unangenehme Zweideutigkeit entſteht.

§. 4.

Allgemeines Coordinatenſyſtem.

Es gibt unendlich viele Coordinatenſyſteme, und im Allgemeinen beſtimmt man die Lage eines Punktes in der Ebene vermittelſt des Durchſchnittes zweier in dieſer Ebene beſchriebener Linien. Wenn A', A'', A''', ... (Fig. 5) eine Reihe von Linien derſelben Art ſind, welche verſchiedenen Werthen u', u'', u''', ... der Veränderlichen u entſprechen, und B', B'', B''', ... ein zweites Sy-

stem von Linien, welche ebenfalls unter sich von einerlei Art sind und verschiedenen Werthen v', v'', v''', . . . der Veränderlichen v entsprechen; so wird ein beliebiger Punkt M', M'', M''', . . . der Ebene durch das Linienpaar der Lage nach bestimmt, welches durch diesen Punkt geht, und die besondern Werthe, welche man den Veränderlichen u, v beilegen muß, um diese beiden Linien zu erhalten, heißen die Coordinaten des Punktes.

In dem parallelen Coordinatensysteme (§. 1) sind die Linien A', A'', A''', . . . parallele Gerade zu der festen Axe $Y_1 Y$ und die Linien B', B'', B''', . . . parallele Gerade zu der Axe $X_1 X$, wobei diese Parallelen durch ihre Abstände u oder x, v oder y von der Axe, zu welcher sie parallel sind, bestimmt werden, indem man diese Abstände auf der andern Axe nimmt.

In dem Polarsysteme sind die Linien A', A'', A''', . . . concentrische Kreise, welche aus dem Pole O als Mittelpunkte mit einem veränderlichen Halbmesser u oder ρ beschrieben sind, und die Linien B', B'', B''', . . . sind gerade Linien, welche von dem Pole ausgehen und verschiedene Winkel ϑ mit OX bilden.

In dem Bipolarsysteme sind beide Reihen von Linien concentrische Kreise, welche aus den beiden Polen beschrieben sind.

§. 5.

Darstellung ebener Linien durch Gleichungen.

Wenn man u den constanten Werth u' beilegt und v sich beliebig ändern läßt, so erhält man die Durchschnittspunkte M', M'', M''', . . . der Linie A' mit den Linien B', B'', B''', . . ., so daß also die Gleichung $u = u'$ die verschiedenen Punkte der Linie A', und mithin diese Linie selbst ausdrückt. Ebenso drückt die Gleichung $v = v'$ die Linie B' aus. In dem geradlinigen Systeme drückt z. B. die Gleichung $y = y'$ eine in dem Abstande y' parallele Gerade $P_1 P$ (Fig. 1) zu der Axe der x aus, und in dem Polarsysteme die Gleichung $\rho = \rho'$ eine Kreislinie von dem Halbmesser ρ'.

Wenn wir jetzt annehmen, daß die beiden Coordinaten u, v durch eine Gleichung:

$$f(u, v) = 0$$

mit einander verbunden sind, so gibt jedes Paar reeller Werthe von u und v, welche dieser Gleichung genügen, einen besondern Punkt der Ebene. Läßt man also u zwischen gewissen Grenzen sich stetig ändern, so geschieht der Gleichung gewöhnlich durch reelle

Werthe von v Genüge, welche ebenfalls stetig aneinander liegen, so daß also die auf diese Weise erhaltenen Punkte der Ebene eine stetige Reihe oder eine Linie bilden. Eine Gleichung mit zwei stetigen Veränderlichen drückt also im Allgemeinen eine ebene Linie aus, welche eine gerade oder krumme (Curve) sein kann.

Umgekehrt: jede ebene Linie kann durch eine Gleichung zwischen zwei stetig veränderlichen Größen ausgedrückt werden. Denn die geometrische Definition einer Linie ist nothwendig eine Relation zwischen gewissen veränderlichen Größen, welche geeignet sind, jeden Punkt dieser Linie zu bestimmen.

Diese Darstellung der Linien durch algebraische Zeichen, wodurch die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der Figuren auf die Untersuchung algebraischer Ausdrücke zurückgeführt wird, rührt von Descartes her, und diese Entdeckung ist von der höchsten Wichtigkeit, weil man die Methoden der Analysis auf die Geometrie anwenden kann, wodurch diese letzte Wissenschaft eine Allgemeinheit bekommt, welche sie zuvor nicht hatte. Die drei Hauptaufgaben der analytischen Geometrie oder Coordinatengeometrie sind folgende:

1) Wenn eine Figur geometrisch definirt ist, ihre Gleichung zu finden.
2) Wenn eine Gleichung gegeben ist, die ihr entsprechende Figur zu construiren.
3) Die Relationen zu finden, welche zwischen den geometrischen Eigenschaften der Figuren und den algebraischen Eigenschaften der Gleichungen stattfinden.

Wir wollen uns nun zunächst mit der ersten Aufgabe beschäftigen.

§. 6.

Bestimmung der Gleichungen der Linien.

Die geometrische Definition einer Linie bestimmt jeden ihrer Punkte und enthält folglich implicite ein gewisses Coordinatensystem. Wenn man dieses System zum Grunde legt, so ergibt sich die Gleichung der Linie unmittelbar.

Beispiel 1. Aus der geometrischen Definition des Kreises: der Kreis ist der geometrische Ort, d. h. die stetige

Folge von Punkten, welche von einem festen Punkte, Mittelpunkt genannt, gleichweit entfernt sind, ergibt sich die Polargleichung desselben sofort, wenn der Mittelpunkt zum Pole genommen wird, und ist $\rho = r$, wo r den Halbmesser des Kreises bedeutet.

Beispiel 2. Die Ellipse (Fig. 8), Hyperbel (Fig. 9) und Lemniscate (Fig. 9a) sind Linien von solcher Beschaffenheit: daß resp. die Summe, die Differenz und das Produkt aus den Abständen jedes ihrer Punkte M von zwei festen Punkten O, O′ eine constante Größe ist.

Das in dieser geometrischen Definition liegende Coordinatensystem ist das bipolare (§. 3), wenn man die beiden festen Punkte zu Polen nimmt. Bezeichnet $2a = AA'$ die constante Summe, oder Differenz und a^2 das constante Produkt, wo bei der Lemniscate $OO' = 2a$ ist; so sind die Gleichungen dieser drei Linien:

Ellipse:		$u + v = 2a,$
Hyperbel:	erster Zweig	$v - u = 2a,$
	zweiter Zweig	$u - v = 2a,$
Lemniscate:		$uv = a^2.$

Beispiel 4. Die Parabel ist die Linie, deren Punkte von einem Pole und von einer Geraden, Richtlinie genannt, gleichweit entfernt sind.

In dieser Definition liegt ein Coordinatensystem, wovon bisher noch nicht die Rede gewesen ist, nämlich das eines Poles O (Fig. 6) und einer Richtlinie D, D. Bei Anwendung dieses Coordinatensystemes wird ein Punkt M der Ebene durch seinen Abstand $OM = u$ von dem Pole O und durch seine Entfernung $MQ = v$ von der Richtlinie bestimmt. In diesem Coordinatensysteme ist die Gleichung der Parabel: $u = v$.

Allgemein, die Gleichung der Linie, welche so beschaffen ist: daß für jeden ihrer Punkte seine Entfernung von einem Pole zu seiner Entfernung von einer Richtlinie in einem constanten Verhältnisse m steht, ist

$$\frac{u}{v} = m.$$

Beiſpiel 4. Wenn man einen Pol O (Fig. 7) und eine Richtlinie $D_1 D$ annimmt, von dem Pole aus eine beliebige Gerade zieht und von dem Punkte C aus, wo ſie die Richtlinie ſchneidet, eine conſtante Länge $CM = a$ nimmt; ſo heißt der geometriſche Ort der auf dieſe Weiſe erhaltenen Punkte eine **Conchoide**. — Zieht man von dem Pole ein Perpendikel OX auf die Richtlinie, ſo wird irgend ein Punkt M der Curve beſtimmt durch den Winkel ϑ, welchen der Radiusvector OM mit der Axe OX bildet und durch das Stück CM dieſes Radiusvectors, welches zwiſchen der Richtlinie und dem Punkte M liegt. Da die conſtante Länge a ſowohl in der Richtung CM, als in der entgegengeſetzten Richtung CM' genommen werden kann, ſo ſieht man, daß die Conchoide zwei Zweige hat, deren Gleichung in Polarcoordinaten offenbar folgende iſt:

$$\varrho = OC \pm a = \frac{c}{\cos \vartheta} \pm a,$$

wo $ON = c$ geſetzt iſt.

§. 7.

Transformation der Coordinaten.

Wir haben weiter oben geſehen: daß die Gleichung einer Curve in dem durch ihre geometriſche Definition angedeuteten Coordinatenſyſteme leicht erhalten wird; allein die allgemeinen Theorien, d. h. die allgemeinen Relationen, welche zwiſchen den geometriſchen Eigenſchaften der Figuren und den algebraiſchen Eigenſchaften der Gleichungen ſtattfinden, beziehen ſich in der Regel auf ein gewiſſes Coordinatenſyſtem, und um dieſe Theorien auf eine gegebene Curve anwenden zu können, muß man die Gleichung in dieſem Coordinatenſyſteme kennen. Man muß alſo vorher eine **Transformation der Coordinaten** vornehmen, deren Zweck iſt: **Wenn die Gleichung einer Curve in einem gewiſſen Coordinatenſyſteme gegeben iſt, die Gleichung derſelben Curve in einem andern Coordinatenſyſteme zu finden.**

Wenn u, v die urſprünglichen und u', v' die neuen Coordinaten eines Punktes bezeichnen; ſo müſſen ſich zwiſchen u, v und u', v' zwei Gleichungen finden laſſen, welche für alle Punkte der Ebene ſtattfinden, weil dieſer Punkt, alſo auch u', v' beſtimmt ſind, wenn man u, v kennt. Sucht man alſo dieſe Gleichungen und eliminirt die urſprünglichen Coordinaten u, v zwiſchen ihnen und der gegebenen Gleichung $f(u, v) = 0$ der Curve, ſo erhält man die

Gleichung $f(u', v') = o$ dieſer Curve in dem neuen Coordinatenſyſteme.

1) Uebergang von dem Polarſyſteme zu den rechtwinkligen Parallelcoordinatenſyſteme.

Wenn man den Pol O (Fig. 3) zum Anfangspunkte, die Polarare OX zur Are der x und das Perpendikel OY zur Are der y nimmt; ſo gibt das rechtwinklige Dreieck MOA die Relationen:

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

woraus folgt:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \text{tang } \vartheta = \frac{y}{x}.$$

Beiſpiel. Die Gleichung des Kreiſes, welche im Polarſyſteme $\varrho = r$ iſt, wird im rechtwinkligen Coordinatenſyſteme:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

2) Uebergang von dem Bipolarſyſteme zu dem Polarſyſteme.

Wenn man einen der urſprünglichen Pole, z. B. O (Fig. 8.) zum Pole und die durch beide Pole gehende Gerade OX zur Are nimmt; ſo hat man folgende Transformationsformeln:

$$u = \varrho, \quad v^2 = \varrho^2 + 4c^2 - 4c\varrho \cos \vartheta,$$

wo 2c die Länge O′ O bezeichnet, und wenn man $\frac{c}{a} = e$, $p = \frac{a^2 - c^2}{a}$ ſetzt; ſo wird z. B. die Polargleichung der Ellipſe:

$$\varrho = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \vartheta} = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \qquad (1)$$

Wenn man bei der Hyperbel OX (Fig. 9) zur Polarare nimmt und $\frac{c}{a} = e$, $p = \frac{c^2 - a^2}{a}$ ſetzt; ſo hat man für den

erſten Zweig: $\varrho = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$ (2)

zweiten Zweig: $\varrho = \frac{p}{-1 + e \cos \vartheta}$ (3)

In der Ellipſe iſt $e < 1$ und in der Hyperbel iſt $e > 1$.

3) Uebergang von dem Bipolarſyſteme zu dem rechtwinkligen Syſteme.

Wenn man den Mittelpunkt C (Fig. 8 u. 9) der Verbindungslinie O′O der beiden Pole zum Anfangspunkte, dieſe Gerade ſelbſt zur Are der x und das in ihrer Mitte errichtete Perpendikel zur Are der y nimmt; ſo ſind die Transformationsformeln:

$$u^2 = y^2 + (c - x)^2$$
$$v^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel werden also in dem rechtwinkligen Coordinatensysteme:

$$\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a.$$
$$\pm(\sqrt{y^2 + (c - x)^2} - \sqrt{y^2 + (c + x)^2}) = 2a.$$

Wenn man die Wurzelgrößen fortschafft, so gehen beide in die eine Gleichung:

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - c^2) \qquad (4)$$

über; allein man kann sie wieder von einander trennen, wenn man bemerkt, daß in der Ellipse $a > c$, aber in der Hyperbel $a < c$ ist. Setzt man daher für die Ellipse $a^2 - c^2 = b^2$ und für die Hyperbel $a^2 - c^2 = -b^2$; so erhält man

für die Ellipse: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (5)

für die Hyperbel: $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (6).

Ebenso erhält man für die Gleichung der Lemniscate:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2\,(y^2 - x^2) = o^4. \qquad (7)$$

4) Uebergang von dem Pol-Richtliniensysteme zu dem Polarsysteme und zu dem rechtwinkligen Systeme.

Wenn man den ursprünglichen Pol O wieder zum Pole und das von demselben auf die Richtlinie gefällte Perpendikel OX (Fig. 6) zur Polarare nimmt; so hat man:

$$u = \varrho,\ v = d - \varrho\cos\vartheta,$$

wo d den Abstand des Poles von der Richtlinie bezeichnet.

Die in dem Pol-Richtliniensysteme durch die Gleichung $\frac{u}{v} = m$ ausgedrückte Linie hat also zur Polargleichung:

$$\varrho = \frac{md}{1 + m\cos\vartheta} \qquad (8)$$

Wenn $m < 1$ ist, so drückt die Gleichung (8) wie (1) eine Ellipse aus. Wenn $m > 1$ ist, so drückt (8) wie (2) den einen Zweig einer Hyperbel aus, deren zweiten Zweig man erhält, wenn man m negativ nimmt. Wenn endlich $m = 1$ ist, so ist die Curve eine Parabel.

Für die allgemeine Gleichung der im Pol-Richtliniensysteme

durch $\frac{u}{v} = m$ ausgedrückten Curve erhält man zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten:

$$y^2 + (1 - m^2)\, x^2 - 2dx + d^2 = o, \qquad (9)$$

wenn man die Richtlinie zur Axe der y und die durch den Pol gehende, darauf ſenkrechte Gerade zur Axe der x nimmt. Denn die Transformationsformeln ſind offenbar:

$$v = x, \; u = \sqrt{(d - x)^2 + y^2},$$

Jede der Gleichungen (8), (9) drückt alſo eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel aus, jenachdem $m < 1$, $m = 1$, oder $m > 1$ iſt.

Auch der zweite Pol O′ der Ellipſe und Hyperbel, ſowie die conſtante Summe, oder Differenz 2a läßt ſich leicht finden; denn man braucht nur die auf der Axe der x liegenden Punkte A, A′ zu ſuchen und O′A′ = OA zu nehmen. Dieſem zweiten Pole entſpricht eine zweite Richtlinie D''_1D', welche dieſelbe Curve gibt.

5) Wenn man bei der Conchoide (Fig. 7) die Richtlinie zur Axe der y, das durch den Pol darauf gezogene Perpendikel zur Axe der x und den Durchſchnittspunkt N dieſer beiden Geraden zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt; ſo hat man die Transformationsformeln:

$$\cos \vartheta = \frac{c + x}{\rho}, \; \rho = \sqrt{y^2 + (c + x)^2}$$

worin c den Abſtand des Poles von der Richtlinie bezeichnet, und die Gleichung der Curve im rechtwinkligen Coordinatenſyſteme wird:

$$xy = \pm (c + x) \sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (10)$$

§. 8.

Bemerkung über das Polarſyſtem.

Weiter oben haben wir bemerkt: daß man in dieſem Coordinatenſyſteme den Winkel ϑ nur innerhalb einer ganzen Umdrehung, etwa von $-\pi$ bis $+\pi$, ſich ändern zu laſſen braucht, um alle Punkte der Ebene zu erhalten; gleichwohl iſt es oft zweckmäßig, denſelben dieſe Grenzen überſchreiten zu laſſen, z. B. bei der Archimediſchen Spirale (Fig. 10), welche entſteht, wenn ſich eine Gerade um einen feſten Punkt O drehet und auf derſelben ein anfangs in O liegender Punkt ſo fortrückt, daß die von demſelben durchlaufenen Längen den von der Geraden beſchriebenen Winkeln proportional ſind. Dieſe Curve beſteht aus einer Reihe von

Windungen OB, BAB', ... Wenn man den festen Punkt zum Pole und die anfängliche Lage der Geraden zur Polarare nimmt; so wird der Theil OB durch die Gleichung $\varrho = a\vartheta$ ausgedrückt, indem sich ϑ von 0 bis π ändert, und die successiven Windungen BAB', ... durch ebensoviele verschiedene Gleichungen $\varrho = a(\vartheta + 2\pi)$, ..., indem sich ϑ von $-\pi$ bis $+\pi$ ändert. Aber wenn man ϑ sich von o bis ∞ ändern läßt, so wird die ganze Curve durch die Gleichung $\varrho = a\vartheta$ ausgedrückt. Wenn man die Lage der Geraden, nachdem sie sich um den Winkel α gedrehet hat, zur Polarare genommen hätte, so wäre die Gleichung der Spirale $\varrho = a(\vartheta + \alpha)$, worin sich ϑ von $-\alpha$ bis ∞ ändern muß.

Einen ähnlichen Vortheil bietet die Anwendung negativer Radienvectoren dar. Man erhält z. B. den ersten Hyperbelzweig (Fig. 9), wenn man in der Gleichung:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}$$

den Winkel ϑ sich von $-(\pi - \alpha)$ bis $+(\pi - \alpha)$ ändern läßt, und den zweiten Hyperbelzweig, wenn in der Gleichung:

$$\varrho = \frac{p}{-1 + e\cos\vartheta}$$

der Winkel ϑ sich von $-\alpha$ bis $+\alpha$ ändert, wo α den spitzen Winkel bezeichnet, dessen Cosinus $= \frac{1}{e}$ ist. Wenn man aber negative Radienvectoren anwendet, welche in einem den positiven entgegengesetzten Sinne genommen werden; so werden beide Hyperbelzweige durch die eine Gleichung:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}$$

ausgedrückt, worin sich ϑ von $-\pi$ bis $+\pi$ ändert. Denn gibt man ϑ einen zwischen $-\pi$ und $-(\pi - \alpha)$ liegenden Werth, welcher mit $-(\pi - \vartheta')$ bezeichnet werde, indem ϑ' zwischen o und α liegt; so ist OM' die entsprechende Richtung des Radiusvectors, und:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos(\pi - \vartheta')} = -\frac{p}{-1 + e\cos\vartheta'}.$$

Es muß also der absolute Werth von:

$$\frac{p}{-1 + e\cos\vartheta'}$$

in entgegengesetztem Sinne, d. h. auf OM_1 genommen werden, und da OM_1 mit OX den Winkel ϑ' bildet, so ist der Punkt M_1,

welcher der Gleichung des zweiten Hyperbelzweiges genügt, ein Punkt dieſes Zweiges, ſo daß man folglich den obern Theil des zweiten Zweiges erhält, und den untern Theil erhält man, wenn man ϑ ſich von $\pi - \alpha$ bis π ändern läßt.

§. 9.

Uebungsaufgaben zur Ableitung der Gleichungen der Curven aus ihren geometriſchen Definitionen.

1) Es iſt ein Kreis O (Fig. 11) und ein feſter Durchmeſſer A_1A gegeben; OB iſt ein beweglicher Halbmeſſer und BT eine Tangente; in dem Punkte T, wo ſie den feſten Durchmeſſer ſchneidet, errichtet man ein Perpendikel, welches den verlängerten Halbmeſſer OB in M trifft; man ſoll die Gleichung des geometriſchen Ortes des Punktes M finden.

Wenn man den Mittelpunkt O zum Pole und OX zur Polarare nimmt, ſo iſt die geſuchte Gleichung in Polarcoordinaten:

$$\varrho = \frac{r}{\cos^2 \vartheta}$$

und in rechtwinkligen Parallelcoordinaten:

$$x^4 - r^2 (x^2 + y^2) = 0,$$

wo r den Halbmeſſer des Kreiſes bedeutet.

2) Pascals Schneckenlinie. — Durch einen auf einem gegebenen Kreiſe liegenden feſten Punkt O (Fig. 12) wird eine bewegliche Sehne OC gezogen, auf welcher zu der einen, oder andern Seite des Punktes C eine conſtante Länge $CM = CM' = a$ genommen wird; man ſoll die Gleichung des geometriſchen Ortes der Punkte M oder M' finden.

Wenn man den Punkt O zum Pole und den Durchmeſſer OX zur Polarare nimmt, ſo iſt die Polargleichung der Curve:

$$\varrho = 2r \cos \vartheta \pm a.$$

3) Epicycloide. — Es ſind zwei gleiche Kreiſe gegeben (Fig. 13), wovon der eine C feſtliegt und der andere C_1 über dem erſten ohne Gleiten fortrollt; man ſoll die Gleichung der Linie finden, welche ein Punkt M des beweglichen Kreiſes beſchreibt.

Betrachtet man den beſondern Fall, wo der Punkt M mit dem Berührungspunkte O zuſammenfällt, nimmt O zum Pole und OX zur Polarare; ſo iſt die Polargleichung der Curve:

$$\varrho = 4r \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 2r (1 - \cos \vartheta),$$

wo r den Halbmeſſer des Kreiſes bezeichnet.

4) Ciſſoide. — Es iſt ein Kreis (Fig. 14), ein Durchmeſſer OA und eine Tangente im Endpunkte dieſes Durchmeſſers gegeben; vom Punkte O wird eine ſich drehende Gerade OD gezogen, und auf derſelben eine Länge OM genommen, welche der zwiſchen dem Kreiſe und der feſten Tangente liegenden Länge CD gleich iſt. Man ſoll die Gleichung des geometriſchen Ortes der Punkte M finden.

Die Polargleichung der Curve (Ciſſoide genannt) iſt:

$$\varrho = 2r \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} = 2r \sin \vartheta \operatorname{tang} \vartheta,$$

und ihre Orthogonalgleichung:

$$x\,(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0.$$

5) Es ſind zwei aufeinander ſenkrechte Gerade GX, GH (Fig. 15) und auf einer derſelben ein Punkt I gegeben. Ein rechtwinkliges Dreieck IEF bewegt ſich ſo, daß eine Winkelſpitze ſtets in I liegt, die Spitze E auf GH fortgleitet und die Seite EF ſtets = GI iſt. Man ſoll die Gleichung der Linie finden, welche der Mittelpunkt M von EF beſchreibt.

Wenn man die Mitte O von GI zum Pole und OX zur Polarare nimmt, ſo iſt die geſuchte Gleichung:

$$\varrho = 2r \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta},$$

wo IG = 2r geſetzt iſt. Die Curve iſt mithin eine Ciſſoide.

6) Die beiden Enden einer Geraden von conſtanter Länge l bewegen ſich auf zwei rechtwinkligen Aren OX, OY; man ſoll die Gleichung des geometriſchen Ortes der Fußpunkte der von O auf dieſe Gerade gefällten Perpendikel finden.

Wenn man OX, OY zu Coordinatenaren nimmt, ſo iſt die Orthogonalgleichung der Curve:

$$(x^2 + y^2)^3 - l^2x^2y^2 = 0,$$

und ihre Polargleichung:

$$\varrho = \frac{l}{2} \sin 2\,\vartheta.$$

7) Wenn die Ordinate des Kreiſes AMB (Fig. 16) ſo weit verlängert wird, daß ſich verhält:

$$PM : AB = MN : AN,$$

ſo iſt die Gleichung des Ortes des Punktes P:

$$xy^2 = 4a^2\,(2a - x),$$

wo AC = x, PN = y und AC = a geſetzt iſt.

8) Quadratrix des Dinoſtratus. — Dieſe Curve iſt der Ort des Durchſchnittspunktes P des ſich gleichförmig um C drehenden Halbmeſſers CQ (Fig. 17) eines Kreiſes und der ſich gleichförmig parallel zu ſich ſelbſt fortbewegenden Ordinate MN deſſelben. Die Gleichung dieſer Curve iſt:

$$y = (x - a) \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right),$$

wo a den Halbmeſſer des Kreiſes bedeutet. Sie beſteht aus unendlich vielen Zweigen, welche die Axe der x in den Abſtänden $\pm a$, $\pm 3a$, $\pm 5a$, . . . von C ſchneiden und zwiſchen Parallelen zur Axe der y liegen, die von C um die Längen $\pm 2a$, $\pm 4a$, $\pm 6a$, . . . entfernt ſind.

9) Cycloide. — So heißt die Curve OMQR (Fig. 18), welche irgend ein Punkt M eines Kreiſes C beſchreibt, der ohne Gleiten auf einer unbegrenzten Geraden (Baſis) XX^1 fortrollt, ſo daß alſo jeder Bogen MN immer dem Stücke ON der Baſis gleich iſt. Setzt man $CM = r$, $\angle MCN = \varphi$, $OP = x$ und $PM = y$, ſo iſt offenbar nach der geometriſchen Definition der Cycloide:

$$ON = r\varphi, \quad PN = MI = r \sin \varphi, \quad PM = IN = r(1 - \cos \varphi);$$

folglich:

$$x = r(\varphi - \sin \varphi),$$
$$y = r(1 - \cos \varphi),$$

und um die Orthogonalgleichung der Curve zu erhalten, muß man φ zwiſchen dieſen beiden Gleichungen eliminiren. Aus der letzten folgt aber:

$$\cos \varphi = \frac{r - y}{r}, \quad \sin \varphi = \pm \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}$$

und wenn man in die erſte Gleichung ſubſtituirt:

$$x = r \cdot \operatorname{arc\,cos} \left(\frac{r - y}{r}\right) \pm \sqrt{2ry - y^2}. \qquad (\mu)$$

Da ſich der erzeugende Kreis auf der Baſis zur Linken und Rechten des Anfangspunktes O beliebig weit fortbewegen kann, ſo folgt, daß die Cycloide aus unendlich vielen Bogen wie OMQR beſteht, welche auch alle durch die Gleichung (μ) gegeben werden. — Offenbar iſt OR dem Umfange und SQ dem Durchmeſſer des Erzeugungskreiſes gleich.

Wenn man den höchſten Punkt Q zum Anfangspunkte, QS zur

Axe der x und QV zur Axe der y nimmt, so ist die Orthogonalgleichung der Cycloide:

$$y = r \arccos\left(\frac{r-x}{r}\right) \pm \sqrt{2rx - x^2}. \qquad (\mu')$$

10) Begleiterin der Cycloide. — Diese Curve erhält man, wenn man die Ordinate NQ des Kreises O (Fig. 19) so weit verlängert, daß NP = Bogen CQ wird. Setzt man CO = r, CN = x PN = y und $\angle COQ = \varphi$, so ist:

$$x = r(1 - \cos\varphi),\quad y = r\varphi,$$

woraus sich durch Elimination von φ als Orthogonalgleichung ergibt:

$$y = r \cdot \arccos\frac{r-x}{r}.$$

11) Trochoide. — Diese Curve entsteht, wenn der beschreibende Punkt M (Fig. 18) nicht in der Peripherie des rollenden Kreises, sondern innerhalb, oder außerhalb desselben liegt. Als ihre Gleichungen findet man leicht:

$$x = r(\varphi - n\sin\varphi),$$
$$y = r(1 - n\cos\varphi),$$

wo n das Verhältniß der Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkte des Kreises zu dem Halbmesser desselben bedeutet.

12) Epitrochoide und Hypotrochoide. — Diese Curven entstehen, wenn der bewegliche Kreis C nicht auf einer Geraden, wie bei der Trochoide, sondern auf der äußern, oder innern Seite eines festen Kreises O (Fig. 20 und 21) fortrollt.

Es sei anfangs der Punkt Q mit A in Berührung, P der beschreibende Punkt, R der Halbmesser des festen, r der des beweglichen Kreises, CP = h, OM = x, PM = y, $\angle AOB = \varphi$, also $\angle QCB = \frac{R}{r}\cdot\varphi$; so ist:

$$x = OH + MH = (R+r)\cos\varphi - h\cos\left(\frac{R+r}{r}\cdot\varphi\right),$$
$$y = CH + CK = (R+r)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{R+r}{r}\cdot\varphi\right). \qquad \text{(Fig. 20.)}$$

$$x = (R-r)\cos\varphi + h\cos\left(\frac{R-r}{r}\cdot\varphi\right),$$
$$y = (R-r)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{R-r}{r}\cdot\varphi\right). \qquad \text{(Fig. 21.)}$$

13) Epicycloide und Hypocycloide. — Diese Curven entstehen, wenn der beschreibende Punkt P im Umfange des rol-

lenden Kreiſes C liegt; alſo $h = r$ iſt. Um die Gleichungen der in Rede ſtehenden Curven zu erhalten, braucht man folglich in den vier letzten Gleichungen nur $h = r$ zu ſetzen, wodurch ſich ergibt:

$$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\left(\frac{R+r}{r}.\varphi\right),$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\left(\frac{R+r}{r}.\varphi\right);$$

$$x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\left(\frac{R-r}{r}.\varphi\right),$$

$$y = (R - r)\sin\varphi - r\sin\left(\frac{R-r}{r}.\varphi\right).$$

Wenn $R = r$ iſt, ſo ſind die Gleichungen der Epicycloide:

$$x = r\,(2\cos\varphi - \cos 2\varphi),$$
$$y = r\,(2\sin\varphi - \sin 2\varphi),$$

oder:

$$x = r\,[1 + 2\cos\varphi\,(1 - \cos\varphi)],$$
$$y = 2r\sin\varphi\,(1 - \cos\varphi).$$

Erhebt man dieſe beiden letzten Gleichungen zum Quadrate und addirt, ſo kommt:

$$x^2 + y^2 = r^2\,[1 + 4\,(1 - \cos\varphi)].$$

Es iſt aber auch:

$$(x - r)^2 + y^2 = 4r^2\,(1 - \cos\varphi^2);$$

folglich die Orthogonalgleichung:

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 4r^2\,[(x - r)^2 + y^2].$$

Wenn man in den Gleichungen der Hypotrochoide $h = r$ und $r = \frac{R}{4}$ ſetzt, ſo ergibt ſich durch Elimination von φ:

$$(r^2 - x^2 - y^2)^3 = 27r^2 x^2 y^2$$

oder:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$$

als Orthogonalgleichung dieſer Hypocycloide.

Setzt man in den Gleichungen der Hypotrochoide $r = \frac{R}{2}$, ſo erhält man:

$$x = \left(\frac{R}{2} + h\right)\cos\varphi,\quad y = \left(\frac{R}{2} - h\right)\sin\varphi,$$

folglich:

$$\left(\frac{R}{2} - h\right)^2 x^2 + \left(\frac{R}{2} + h\right)^2 y^2 = \left(\frac{R^2}{4} - h^2\right)^2,$$

d. h. die Gleichung einer Ellipſe, deren Axen gleich $\frac{R}{2}+h$, und $\frac{R}{2}-h$ ſind.

Wenn $h=\frac{R}{2}$ iſt, ſo geht die Hypotrochoide in eine Gerade über, welche im Durchmeſſer des feſten Kreiſes iſt.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Transformation der parallelen oder geradlinigen Coordinaten.

§. 10.

Wir haben im vorhergehenden Kapitel verſchiedene Coordinatenſyſteme betrachtet, wovon jedes in beſondern Fällen eigenthümliche Vortheile darbieten kann; allein das Coordinatenſyſtem, welches zur Unterſuchung der allgemeinen Eigenſchaften der Figuren am beſten geeignet iſt, ſcheint das geradlinige oder parallele Coordinatenſyſtem zu ſeyn. Auch haben wir bereits die Gleichungen von verſchiedenen Curven in dieſem Coordinatenſyſteme gefunden, wobei es jedoch eine ganz particuläre Lage in der Figur hatte. Es iſt daher von Wichtigkeit: zu zeigen, wie man die Gleichung einer Curve im parallelen Coordinatenſyſteme erhalten kann, wenn daſſelbe eine beliebige Lage in ihrer Ebene hat. Dieſe Aufgabe iſt nur ein beſonderer Fall der Transformation der Coordinaten überhaupt, und läßt ſich ſo ausdrücken: Wenn die Gleichung einer Curve in einem Syſteme paralleler Coordinaten gegeben iſt, ihre Gleichung in einem andern Syſteme ſolcher Coordinaten zu finden — und nach dem weiter oben Geſagten (§. 7) kommt es darauf an: zwiſchen den Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes der Ebene in dem urſprünglichen Coordinatenſyſteme und den Coordinaten x′, y′ deſſelben Punktes in dem neuen Syſteme zwei Gleichungen zu finden.

§. 11.

Verlegung des Anfangspunktes.

Wir wollen zunächſt den Anfangspunkt der Coordinaten von O

nach O′ (Fig. 22) verlegen, ohne die Richtung der Axen zu ändern, so daß die neuen Axen X_1, X', Y_1, Y' zu den ursprünglichen X_1X, Y_1Y *parallel* sind, und außerdem wollen wir annehmen: daß die *positiven* x und x′, sowie die *positiven* y und y′ in *demselben* Sinne genommen werden; so wird die Lage der neuen Axen durch die Coordinaten a, b des neuen Anfangspunktes O′ in Beziehung auf die ursprünglichen Axen vollständig bestimmt.

Es sei M ein beliebiger Punkt der Ebene, so kann man auf zwei Wegen von O nach M gelangen; nämlich auf der geraden Linie OM und auf der gebrochenen Linie OO′M. Nach der allgemeinen Theorie der *Projectionen* sind aber die Projectionen dieser beiden Wege auf die Axe der x, parallel zu der Axe der y, *einander gleich*. Die Projection von OO′ ist = a, die von O′M ist = x′ und die von OM ist = x; folglich $x = a + x'$. Projicirt man ebenso auf die Axe der y parallel zu der der x, so erhält man $y = b + y'$. Man hat also:

$$\left.\begin{array}{lll} x = a + x', & , & x' = x - a, \\ y = b + y' & & y' = y - b \end{array}\right\} \quad (1)$$

§. 12.

Richtungsveränderung der Axen.

Es seien YOX, Y′OX′ (Fig. 23) resp. das ursprüngliche und das neue Axensystem, OA irgend eine Gerade in ihrer Ebene, von welcher aus die Winkel in einem bestimmten Sinne, etwa von OX gegen OY, gezählt werden, α, β; α, β' resp. die Winkel, welche die Axen OX, OY; OX′, OY′ mit OA bilden und ihre Lage in der Ebene bestimmen, M ein beliebiger Punkt dieser Ebene und MP, MP′ resp. parallel zu den Axen der y und der y′; so führen zwei Wege von O nach M, nämlich OPM und OP′M. Endlich sei OH eine Gerade, welche mit OA einen Winkel λ ubildet, so macht sie mit OX, OY; OX′, OY′ resp. die Winkel $\alpha - \lambda$, $\beta - \lambda$, $\alpha' - \lambda$, $\beta' - \lambda$. Projicirt man nun die beiden Wege OPM und OP′M auf die Gerade OH, so sind ihre Projectionen resp.:

$$x \cos(\alpha - \lambda) + y \cos(\beta - \lambda),$$
$$x' \cos(\alpha' - \lambda) + y' \cos(\beta' - \lambda),$$

und da diese Projectionen einander *gleich* sind; so hat man die Relation:

$$x \cos(\alpha - \lambda) + y \cos(\beta - \lambda) = x' \cos(\alpha' - \lambda) + y' \cos(\beta' - \lambda).$$

Gibt man jetzt λ succeſſive die Werthe $\beta - \frac{\pi}{2}$, $\alpha - \frac{\pi}{2}$, $\beta' - \frac{\pi}{2}$, $\alpha' - \frac{\pi}{2}$, ſo findet man:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\alpha' - \beta) + y' \sin(\beta' - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}, \\ y &= \frac{x' \sin(\alpha' - \alpha) + y' \sin(\beta' - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}, \\ x' &= \frac{x \sin(\alpha - \beta') + y \sin(\beta - \beta')}{\sin(\alpha' - \beta')}, \\ y' &= \frac{x \sin(\alpha - \alpha') + y \sin(\beta - \alpha')}{\sin(\beta' - \alpha')}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wenn man die Richtung OA mit OX zuſammenfallen läßt, ſo iſt $\alpha = 0$, β der Winkel der urſprünglichen Axen, welchen man gewöhnlich mit ϑ bezeichnet, und α', β' ſind die Winkel, welche die neuen Axen OX′, OY′ mit OX machen, und welche die Lage dieſer Axen gegen die urſprünglichen beſtimmen. Läßt man endlich der Kürze wegen die Accente von α', β' hinweg, ſo gehen die Formeln (2) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\vartheta - \alpha) + y \sin(\vartheta - \beta)}{\sin \vartheta}, \\ y &= \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \vartheta}; \\ x' &= \frac{x \sin \beta + y \sin(\beta - \vartheta)}{\sin(\beta - \alpha)}, \\ y' &= \frac{-x \sin \alpha - y \sin(\alpha - \vartheta)}{\sin(\beta - \alpha)}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. das urſprüngliche Syſtem rechtwinklig iſt, ſo hat man:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta; \\ x' &= \frac{x \sin \beta - y \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)}, \\ y' &= \frac{-x \sin \alpha + y \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wenn das neue Syſtem rechtwinklig iſt, ſo kann man $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, oder $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$ haben. Im erſten Falle iſt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\vartheta - \alpha) - y' \cos(\vartheta - \alpha)}{\sin \vartheta}, \\ y &= \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \vartheta}; \\ x' &= x \cos \alpha + y \cos(\vartheta - \alpha), \\ y' &= -x \sin \alpha + y \sin(\vartheta - \alpha), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und für den zweiten Fall braucht man nur $-y'$ für y' zu setzen.

Wenn beide Coordinatensysteme rechtwinklig sind, so kann man wieder $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ setzen, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha; \\ x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§. 13.

Allgemeine Coordinatenverwandlung.

D. h. wenn sowohl der Anfangspunkt verlegt, als die Richtung der Axen verändert wird. Die Lage des neuen Coordinatensystemes $Y'O'X'$ (Fig. 23a) bestimmt man durch die Coordinaten a, b des neuen Anfangspunktes O' in Bezug auf die frühern Axen und durch die Winkel α, β, welche die neuen Axen $O'X'$, $O'Y'$ mit der Axe OX bilden. Wenn man durch den Punkt O' zwei Hülfsaxen $O'X_1$, $O'Y_1$ legt, welche resp. zu OX, OY parallel sind, so hat man zwischen den Coordinaten des ersten Systemes und denen des Hülfssystemes die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_1, \\ y &= b + y_1, \end{aligned}\right\} \text{ oder: } \left.\begin{aligned} x_1 &= x - a, \\ y_1 &= y - b, \end{aligned}\right.$$

und endlich zwischen diesen und denen des neuen Systemes die Relationen des vorhergehenden §., wenn man darin x_1, y_1 resp. für x, y setzt. Man erhält folglich die allgemeinsten Transformationsformeln, wenn man in den Relationen (3), (4), (5) und (6) resp. $x - a$ und $y - b$ für x, y setzt.

§. 14.

Gegenseitige Entfernung zweier Punkte.

Es seien x', y' die Coordinaten des ersten Punktes M' (Fig 24), x'', y'' die des zweiten Punktes M'', D die gesuchte Entfernung und x_1, y_1 die Coordinaten von M'' in Bezug auf zwei durch M' zu den ursprünglichen als rechtwinklig vorausgesetzten Axen pa-

rallele Axen; so ist $x_1 = x'' - x'$ und $y_1 = y'' - y'$, und endlich gibt das in P rechtwinklige Dreieck, M'PM'' die Relation:

$$D = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}. \quad (7)$$

Wenn die Axen schiefwinklig sind (Fig. 25), so legt man durch M' zwei Axen, wovon die eine zu der Axe der x parallel und die andere darauf senkrecht ist. Alsdann ist noch:

$$D = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

und man muß die beiden letzten der Transformationsformeln (5) nehmen, worin $\alpha = 0$, $x = x'' - x'$, $y = y'' - y'$ ist; folglich:

$$x_1 = (x'' - x') + (y'' - y') \cos \vartheta,$$
$$y_1 = (y'' - y') \sin \vartheta,$$

und endlich:

$$D = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y') \cos \vartheta}, \quad (8)$$

was auch unmittelbar aus dem Dreiecke M'P'M'' folgt. Die Formeln (7) und (8) haben allgemeine Gültigkeit, welche Lagen die Punkte M', M'' in der Ebene auch haben mögen; nur muß man nicht unterlassen, ihre Coordinaten mit den gehörigen Zeichen zu nehmen.

In Polarcoordinaten ist die gegenseitige Entfernung zweier Punkte M', M'' (Fig. 26) offenbar:

$$M'M'' = r = \sqrt{\varrho'^2 + \varrho''^2 - 2\varrho'\varrho'' \cos(\vartheta'' - \vartheta')}, \quad (8')$$

wo $OM' = \varrho'$, $OM'' = \varrho''$, Winkel $M'OX = \vartheta$ und Winkel $M''OX = \vartheta'$ gesetzt ist.

§. 15.

Allgemeine Gleichung einer Gattung von Curven.

1) Lemniscaten. — Die Gleichung der Lemniscate in Bezug auf zwei Pole ist $uv = a^2$, worin a eine Constante oder einen Parameter bezeichnet; aber diese Gleichung drückt nicht alle Lemniscaten aus. Denn wenn man a auch verschiedene Zahlenwerthe gibt, so erhält man doch nur die Lemniscaten, welche zwei feste Punkte zu ihren Polen haben. Ferner haben wir gefunden (§. 7), daß die Gleichung der Lemniscate in Beziehung auf zwei auf eine specielle Weise mit der Curve verbundene rechtwinklige Axen O'X', O'Y' (Fig. 27) folgende ist:

$$\left.\begin{aligned} &(x'^2 + y'^2)^2 + 2a^2 (y'^2 - x'^2) = 0, \\ \text{oder: } &(x'^2 + y'^2 + a^2)^2 - 4ax'^2 - a^4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

welche alle Lemniscaten ausdrückt, wenn man dem Parameter a verſchiedene Zahlenwerthe beilegt, die aber beſondere Lagen in der Ebene haben.

Nun ſeien OX, OY zwei beliebig in der Ebene der Curve angenommene Axen, welche wir der Einfachheit wegen rechtwinklig vorausſetzen wollen; ſo wird die Lage der beweglichen Axen O'X', O'Y' durch die Coordinaten p, q des beweglichen Anfangspunktes O' und durch den veränderlichen Winkel α beſtimmt, welchen O'X' mit OX bildet. Setzt man alſo in der Gleichung (9) für x', y' ihre Werthe:

$$x' = (x - p)\cos\alpha + (y - q)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x - p)\sin\alpha + (y - q)\cos\alpha,$$

ſo erhielt man die Gleichung:

$$[(x-p)^2 + (y-q)^2 + a^2]^2 - 4a^2[(x - p)\cos\alpha + (y - q)\sin\alpha]^2 - a^4 = 0, \qquad (10)$$

welche vier willkürliche Parameter a, p, q, α enthält, und alle Lemniscaten ausdrückt, welche Lage ſie in der Ebene auch haben mögen. Dieſe Gleichung (10) iſt folglich die allgemeine Gleichung der Gattung der Lemniscatencurven.

Von der Gleichung $uv = a^2$ ausgehend, kann man auch durch eine einzige Operation zu der allgemeinen Gleichung (10) gelangen. Denn wenn p', q' und p'', q'' die Coordinaten der beiden Pole ſind und der Ausdruck (7) für die gegenſeitige Entfernung zweier Punkte benutzt wird; ſo erhält man für die allgemeine Gleichung der Lemniscaten:

$$[(x-p')^2+(y-q')^2][(x-p'')^2+(y-q'')^2] - a^4 = 0. \qquad (11)$$

Dieſe Gleichung enthält wie (10) vier willkürliche Parameter, ſo daß beide gleichgeltend ſind; und in der That läßt ſich die eine in die andere transformiren, wenn man zwiſchen den vier Parametern die folgenden Relationen feſtſetzt:

$$a = a,\ p = \frac{p' + p''}{2},\ q = \frac{q' + q''}{2},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{q'' - q'}{p'' - p'},\ a^2 = \frac{1}{4}[(p'' - p')^2 + (q'' - q')^2].$$

2) Ellipſe, Hyperbel und Parabel. Die Gleichung $\frac{u}{v} = m$ drückt die Ellipſen, Hyperbeln und Parabeln aus, welche denſelben Pol und dieſelbe Richtlinie haben; die Gleichung:

$$y'^2 + (1 - m^2)x'^2 - 2dx' + d^2 = 0$$

drückt alle Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln aus, aber nur in besondern Lagen, und endlich führt die Transformation der Coordinaten auf die allgemeine Gleichung:

$$(1 - m^2 \cos^2 \alpha (x^2 +) 1 - m^2 \sin^2 \alpha) y^2 + 2m^2 \sin \alpha \cos \alpha xy + \ldots = o \qquad (12)$$

mit fünf willkürlichen Parametern m, d, p, q, α.

Setzt man:

$$\frac{A}{1-m^2\cos^2\alpha} = \frac{B}{2m^2 \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{C}{1-m^2\sin^2\alpha} = \ldots = \frac{1}{\ldots},$$

so treten an die Stelle der fünf ursprünglichen Parameter die neuen A, B, C, D, E, und die allgemeine Gleichung der Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln nimmt folgende Form an:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1 = o. \qquad (13)$$

Die Relationen:

$$1 - m^2 \cos^2 \alpha = A,$$
$$1 - m^2 \sin^2 \alpha = C,$$
$$2m^2 \sin \alpha \cos \alpha = B,$$

geben:

$$4(1 - m^2) = 4AC - B^2,$$

und da in der Gleichung (12) die charakteristischen Merkmale der Ellipse, Parabel und Hyperbel resp. sind:

$$m^2 < 1,\ m^2 = 1 \text{ und } m^2 > 1;$$

so sind dieselben Merkmale in der Gleichung (13) resp.:

$$B^2 - 4AC < o,\ B^2 - 4AC = o \text{ und } B^2 - 4AC > o.$$

3) Kreise. Die Gleichung des Kreises in Beziehung auf rechtwinklige Axen und seinen Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten ist:

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

und die angedeutete Transformation gibt für die allgemeine Gleichung der Kreise:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \qquad (14)$$

welche nur noch drei willkürliche Parameter, nämlich die Coordinaten p, q des Mittelpunktes und den Halbmesser r enthält.

Wenn die Axen schief sind, so muß man die Formeln (5) anwenden, worin resp. x — p, y — q für x, y zu setzen ist und ϑ den Winkel der Axen bedeutet, und man erhält:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + 2(x-p)(y-q)\cos\vartheta = r^2,$$

oder entwickelt:

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\vartheta + mx + ny + l = o. \qquad (15)$$

Der Kreis wird also allgemein durch eine Gleichung des zweiten Grades ausgedrückt, worin die Glieder mit x^2, y^2 die Einheit und das Glied mit xy den doppelten Cosinus des Axenwinkels als Coefficienten haben.

Die allgemeine Gleichung einer Curvengattung ist also diejenige, welche sich auf zwei feste Coordinatinatenaxen bezieht und so beschaffen ist: daß sie, wenn man den darin vorkommenden willkürlichen Constanten oder Parametern entsprechende Werthe beilegt, alle Curven der Gattung ausdrücken kann, welche Lage diese in der Ebene auch haben mögen. Gewöhnlich sucht man die Gleichung der Curve erst in Beziehung auf besondere Axen, so daß die Rechnungen möglichst einfach werden — und dann bezieht man die Curve durch eine Coordinatenverwandlung auf beliebige feste Axen.

Die Anzahl μ der in der allgemeinen Gleichung einer Gattung von Curven vorkommenden willkürlichen Parameter ist deshalb wohl zu beachten, weil sie angibt, wieviele Bedingungen zur Bestimmung irgend einer dieser Gattung von Curven erforderlich sind. In der That muß man, um eine particulare Curve zu bestimmen, entweder unmittelbar die Zahlenwerthe der μ willkürlichen Parameter, oder μ Relationen zwischen ihnen geben.

§. 16.

Classification der Linien.

Man unterscheidet die Linien in algebraische und transcendente, jenachdem ihre Gleichungen im parallelen Coordinatensysteme algebraische, oder transcendente sind. Wir werden uns vorzugsweise nur mit algebraischen Curven beschäftigen. Eine algebraische Gleichung kann immer auf eine ganze Form gebracht werden, und es sei:

$$f(x, y) = o$$

eine solche Gleichung vom m^{ten} Grade. Um die Gleichung derselben Curve in einem andern Systeme paralleler Coordinaten zu erhalten, muß man für x und y die in §. 12 abgeleiteten Werthe setzen, und da diese Werthe in Beziehung auf x, y; x', y linear und von der Form:

$$x = a + dx' + ey',$$
$$y = b + fx' + gy'$$

sind; so ist die transformirte Gleichung:

$$f(a + dx' + ey', b + fx' + gy') = o$$

ebenfalls vom mten Grade, so daß also dieselbe Linie in allen parallelen Coordinatensystemen durch Gleichungen von demselben Grade ausgedrückt wird, was als ein charakteristisches Merkmal der Linie betrachtet werden kann, weshalb man die Linien auch nach dem Grade ihrer Gleichungen in Linien des ersten, zweiten, dritten, ... Grades klassificirt.

Soll eine Gleichung des mten Grades wirklich eine Linie des mten Grades ausdrücken, so darf sich ihr erster Theil nicht in ein Produkt ganzer Factoren von x, y zerlegen lassen. Denn wenn man die Gleichung auf die Form:

$$\varphi(x, y) \cdot \psi(x, y) = 0$$

bringen könnte, wo $\varphi(x, y)$ vom nten und $\psi(x, y)$ vom $(m-n)$ten Grade ist; so würde sie zwei Linien $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ resp. von der nten und $(m-n)$ten Ordnung ausdrücken.

Wenn $f(x, y) = 0$ und $F(x, y) = 0$ zwei ganze algebraische Gleichungen resp. vom mten und vom nten Grade sind, so erhält man die gemeinschaftlichen Punkte der durch diese Gleichungen ausgedrückten Linien, wenn man sie als zwei simultane Gleichungen mit zwei Unbekannten betrachtet. Wenn man z. B. y eliminirt, so erhält man eine Gleichung mit x, welche höchstens vom m.nten Grade ist, und deren Wurzeln die Abscissen der Durchschnittspunkte sind. Die beiden Linien schneiden sich also höchstens in m.n Punkten.

Der Grad einer Linie gibt im Allgemeinen an, in wie vielen Punkten sie von einer geraden Linie geschnitten wird; denn wenn man diese Gerade zur Axe der x nimmt, so ist $y = 0$ die Gleichung derselben, und um y zu eliminiren, braucht man in der Gleichung der Curve $f(x, y) = 0$ nur $y = 0$ zu setzen, was eine Gleichung mit x gibt, die höchstens vom mten Grade ist. Eine Linie des mten Grades kann also von einer geraden Linie höchstens in m Punkten geschnitten werden.

Wenn die durch die Gleichungen $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$ ausgedrückten Linien einen gemeinschaftlichen Zweig haben, so haben die beiden Polynome $f(x, y)$, $F(x, y)$ einen gemeinschaftlichen Divisor $\varphi(x, y)$, und die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ drückt den gemeinschaftlichen Curvenzweig aus. Wenn also zwei nicht zerlegbare Gleichungen dieselbe Linie ausdrücken, so müssen sie identisch, d. h. ihre Coefficienten proportional sein.

Drittes Kapitel.

Unterſuchung der Linien des erſten Grades.

§. 17.

Conſtruction der Gleichung des erſten Grades.

Die allgemeine Gleichung des erſten Grades zwiſchen zwei Veränderlichen x, y iſt:

$$Ax + By + C = o, \qquad (1)$$

worin A und B nicht zugleich Null ſein können, weil ſonſt auch C = o wäre. Wenn A = o, oder B = o iſt, ſo reducirt ſich die Gleichung (1) reſp. auf:

$$y = -\frac{C}{B} = b, \text{ oder } x = -\frac{C}{A} = a',$$

und wenn B nicht = o iſt; ſo kann man ſie auf die Form:

$$y = ax + b \qquad (2)$$

bringen, wenn man $a = -\frac{A}{B}$ und $b = -\frac{C}{B}$ ſezt. Beide Formen werden wir gleichzeitig anwenden.

Die Gleichung y = b drückt offenbar eine Parallele zu der Are der x und die Gleichung x = a' eine Parallele zur Are der y aus. Wenn b = o und a' = o wird, ſo reduciren ſich dieſe Gleichungen auf y = o, x = o und drücken reſp. die Are der x und die der y aus.

Wenn in der Gleichung (2) die Größe b = o iſt, ſo reducirt ſie ſich auf $y = ax$ oder $\frac{y}{x} = a$; d. h. das Verhältniß zwiſchen der Ordinate und Abſciſſe jedes Punktes des entſprechenden geometriſchen Ortes iſt conſtant und = a. Wenn a poſitiv iſt, ſo haben y und x gleiche Zeichen, und folglich liegen alle Punkte des Ortes in den beiden Winkeln YOX und Y_1OX_1 (Fig. 28). Nimmt man eine beliebige Abſciſſe OP und zieht durch den Punkt P eine Parallele zur Are der y, ſo kann man auf dieſer Parallele immer einen Punkt M von ſolcher Beſchaffenheit finden, daß $\frac{MP}{OP} = a$, alſo M ein Punkt des geometriſchen Ortes iſt. Conſtruirt man ebenſo verſchiedene Punkte M', M'', . . . dieſes Ortes, ſo hat man:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \ldots .$$

Die Dreiecke OPM, OP'M', OP''M'', . . . sind also einander ähnlich, mithin die Winkel MOP, M'OP', M''OP'', . . . einander gleich, und folglich liegen die Punkte M, M', M'', . . . alle in derselben durch den Anfangspunkt O gehenden Geraden A_1A, welche folglich durch die Gleichung $y = ax$ ausgedrückt wird, weil man vermittelst derselben immer beliebig viele Punkte dieser Geraden erhalten kann.

Wenn a negativ ist, so haben die Coordinaten y, x entgegengesetzte Zeichen, und folglich liegen alle Punkte des Ortes in den Winkeln Y_1OX, YOX, (Fig. 29). Construirt man verschiedene Punkte M, M', M'', . . . desselben, wie vorhin, so hat man:

$$\frac{MP}{-OP} = \frac{M'P'}{-OP'} = \frac{-M''P''}{OP''} = \ldots$$

oder:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \ldots$$

und folglich liegen alle Punkte des Ortes in einer durch den Anfangspunkt O gehenden geraden Linie A_1A.

Werden nun die Parallelen PM, P'M', P''M'', . . . zur Axe der y verlängert, und von den Punkten M, M', M'', . . . aus in der positiven, oder negativen Richtung, jenachdem b positiv, oder negativ ist, die Längen MN, M'N', M''N'' . . . genommen, deren absoluter Werth dem von b gleich ist; so wird der Ort der Punkte N, N', N'', . . . durch die Gleichung $y = ax + b$ ausgedrückt. Dieser Ort ist aber eine zu A_1A parallele gerade Linie B_1B, und mithin drückt die Gleichung $y = ax + b$ die Gerade B_1B aus. Jede Gleichung des ersten Grades mit zwei Veränderlichen x, y drückt also eine gerade Linie aus.

§. 18.

Gleichung einer Geraden.

Umgekehrt: die Gleichung jeder geraden Linie ist vom ersten Grade. Denn wenn die Gerade zur Axe der x, oder der y parallel ist, so ist ihre Gleichung resp. $y = b$ oder $x = c$, und wenn sie durch den Anfangspunkt geht und mit keiner der bei-

den Aren zusammenfällt; so hat sie eine der Lagen A_1A (Fig. 28 u. 29). Alsdann hat man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-MP''}{-OP''} = \ldots\\ \frac{-MP}{OP} = \frac{-M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{-OP''} = \ldots\end{aligned}\right\} \text{d. h. } \frac{y}{x} = a,$$

wo a eine Constante ist. Die Gleichung der Geraden ist folglich $y = ax$. Ist die Gerade zu keiner der Aren parallel und geht auch nicht durch den Anfangspunkt, so ist ihre Gleichung:

$$y = ax + b,$$

weil ihre Ordinaten die zu denselben Abscissen gehörigen Ordinaten der durch den Anfangspunkt zu ihr gezogenen Parallelen um dieselbe constante Größe b übertreffen.

Die Gleichung jeder geraden Linie, welche nicht durch den Anfangspunkt geht und zu keiner der Coordinatenaren parallel ist, hat also die Form:

$$y = ax + b, \qquad (2)$$

oder kann wenigstens immer auf diese Form gebracht werden. Die Constante b ist die Ordinate des Punktes, wo die Gerade die Are der y schneidet, und wird die Ordinate im Anfangspunkte genannt. Die Constante a hängt blos von der Richtung der Geraden ab, ist für alle parallele Gerade dieselbe — und heißt deshalb der Richtungscoefficient. Denn für die durch den Anfangspunkt gezogene Parallele A_1A (Fig. 28 u. 29) hat man, wenn $\angle AOX = \alpha$ und $\angle YOX = \vartheta$ gesetzt wird:

$$a = \frac{y}{x} = \frac{MP}{OP} = \frac{\sin MOP}{\sin OMP} = \frac{\sin}{\sin(\vartheta - \alpha)},$$

$$a = \frac{y}{x} = \frac{MP}{-OP} = \frac{\sin MOP}{-\sin OMP} = \frac{\sin \alpha}{-\sin(\alpha - \vartheta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)}.$$

Es ist also in allen Fällen:

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)}, \qquad (3)$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \sin \vartheta}{1 + a \cos \vartheta} = \frac{-A \sin \vartheta}{B - A \cos \vartheta}. \qquad (4)$$

Wenn die Aren rechtwinklig sind, so wird:

$$\operatorname{tang} \alpha = a = -\frac{A}{B}.$$

Umgekehrt: wenn die Ordinate b im Anfangspunkte und der

Winkel α gegeben ist, welchen die Gerade mit der Axe der x bildet; so ist diese Gerade vollständig bestimmt, und ihre Gleichung in schiefwinkligen Coordinaten:

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\vartheta - \alpha)} \cdot x + b,$$

und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$y = \text{tang}\, \alpha \,.\, x + b.$$

Daß der Ort einer Gleichung des ersten Grades:

$$Ax + By + C = o \text{ oder } y = ax + b \qquad (\mu)$$

eine gerade Linie ist, läßt sich auch wie folgt zeigen: Es seien x', y' und x'', y'' die Coordinaten irgend zweier Punkte dieses Ortes, so müssen sie der Gleichung (μ) genügen, so daß man hat:

$$Ax' + By' + C = o \text{ oder } y' = ax' + b,$$
$$Ax'' + By'' + C = o \text{ oder } y'' = ax'' + b,$$

woraus folgt:

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{A}{B} = a.$$

Denkt man sich nun die beiden Punkte (x', y') und (x'', y'') durch eine gerade Linie verbunden, und bezeichnet α den Winkel, welchen sie mit der Axe der x macht; so ist in schiefwinkligen Coordinaten nach dem Obigen:

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\vartheta - \alpha)} = -\frac{A}{B} = a,$$

woraus folgt:

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{a \sin \vartheta}{1 + a \cos \vartheta} = \frac{-A \sin \vartheta}{B - A \cos \vartheta}$$

und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\text{tang}\, \alpha = a = -\frac{A}{B}.$$

Hieraus sieht man: daß die gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte des geometrischen Ortes der Gleichung (1) oder (2) verbindet, einen constanten Winkel mit der Axe der x bildet, und mithin dieser Ort selbst eine gerade Linie sein muß.

§. 19.

Es ist bereits bemerkt: daß die Lage der durch die Gleichung:

$$Ax + By + C = o \text{ oder } y = ax + b$$

ausgedrückten Geraden durch die Constanten $a = -\frac{A}{B}$ und $b =$

$-\frac{C}{B}$ bestimmt wird. Man kann aber die Lage dieser Geraden auch dadurch finden: daß man ihre Durchschnittspunkte (o, y_0), (x_0, o) mit den Coordinatenaxen sucht, indem man in der Gleichung successive $x = o$ und $y = o$ setzt, wodurch man

$$y_0 = -\frac{C}{B} = b \text{ und } x_0 = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{a}$$

erhält. Diese Bestimmungsart ist aber nicht mehr anwendbar, wenn die Gleichung die Form hat:

$$Ax + By = o \text{ oder } y = ax,$$

weil man $y_0 = o$, $x_0 = o$ erhalten würde, wodurch die Lage der Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, nicht völlig fixirt wird. In diesem Falle wird jedoch die Lage der Geraden durch die Constante $a = -\frac{A}{B}$ allein bestimmt.

§. 20.

Andere Formen der Gleichung einer Geraden.

1) Wenn man x_0, y_0 in die allgemeine Gleichung der Geraden einführt, so bekommt sie folgende Form:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \qquad (5)$$

2) Wenn man in der Gleichung:

$$y = ax + b$$

für a seinen Werth $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ bei rechtwinkligen Coordinaten setzt, so erhält man:

$$y \cos\alpha - x \sin\alpha = b \cos\alpha = p, \qquad (6)$$

wo p das aus dem Anfangspunkte O (Fig. 30) auf die betrachtete Gerade $A_1 A$ gefällte Perpendikel OQ bedeutet.

Diese Form der allgemeinen Gleichung einer Geraden ergibt sich auch sofort durch Coordinatenverwandlung aus der Gleichung $x = p$ der Parallele zur Axe der y, indem man die Axen um den Winkel $-\alpha$ drehet, also $y \cos\alpha - x \sin\alpha$ für x setzt.

3) Wenn man auf der Geraden $A_1 A$ (Fig. 31) einen Punkt M_0 annimmt, so muß man von diesem Punkte aus zwei einander gerade entgegengesetzte Richtungen $M_0 A$ und $M_0 A_1$ unterscheiden, und wenn α, β resp. die Winkel bedeuten, welche $M_0 A$ mit OX, OY bildet, x_0, y_0 die Coordinaten des Punktes M_0, x, y die eines

beliebigen Punktes M von $M_0 A$ und ρ die Länge $M_0 M$; so ist die Gleichung von $M_0 A$ in rechtwinkeligen Coordinaten.

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \rho, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Um die Gleichung von $M_0 A_1$ zu erhalten, müßte man die Zeichen von $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ verändern, oder ρ negativ nehmen. Die Gleichung der ganzen Geraden $A_1 A$ ist also:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta}. \qquad (7)$$

4) Wenn α, β die Winkel bedeuten, welche das aus dem Anfangspunkte O (Fig. 32) auf die betrachtete Gerade $A_1 A$ gefüllte Perpendikel $OQ = p$ mit den schiefwinkligen Axen OX, OY bildet, so hat man offenbar:

$$p = x_0 \cos\alpha = y_0 \cos\beta,$$

wo x_0, y_0 resp. die von den Axen der x und der y durch die Gerade $A_1 A$ abgeschnittenen Stücke bezeichnen, und die Gleichung der Geraden $A_1 A$ ist folglich, wenn man die Werthe von x_0, y_0 in die Gleichung (5) setzt:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = p, \quad \alpha + \beta = o. \qquad (8)$$

§. 20.

Allgemeine Gleichung der durch einen Punkt (x', y') gehenden Geraden.

Da die Gerade durch den Punkt (x', y') geht, so müssen x' und y' der Gleichung:

$$Ax + By + C = o \text{ oder } y = ax + b \qquad (1)$$

genügen, so daß man hat:

$$Ax' + By' + C = o \text{ oder } y' = ax' + b \qquad (1')$$

durch welche Relation einer der beiden willkürlichen Parameter, z. B. $b = -\frac{C}{B}$ als Function des andern $a = -\frac{A}{B}$ bestimmt wird, welcher allein willkürlich bleibt. Um den ersten zu eliminiren, braucht man nur (1') von (1) abzuziehen, wodurch man die Gleichung:

$$A(x - x') + B(y - y') = o \text{ oder } y - y' = a(x - x') \qquad (9)$$

erhält, worin blos noch der eine willkürliche Parameter, nämlich der Richtungscoefficient vorkommt, und welche alle durch den Punkt (x', y') gehenden Geraden ausdrückt. Dieser Gleichung geschieht in der That durch $x = x'$ und $y = y'$ Genüge.

§. 21.

Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt (x', y') geht und mit der Axe der x einen gegebenen Winkel α bildet.

Dieſe Gleichung iſt offenbar in ſchiefwinkligen Coordinaten:

$$y - y' = \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)} (x - x'), \qquad (10)$$

und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} y - y' = \operatorname{tang} \alpha \, (x - x') \\ \text{oder:} \\ (y - y') \cos \alpha - (x - x') \sin \alpha = 0. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Dieſes ſind offenbar auch die Gleichungen einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt (x', y') geht und zu einer gegebenen Geraden, die mit der Abſciſſenaxe einen Winkel α bildet, parallel iſt.

§. 22.

Gleichung einer durch zwei Punkte (x', y'), (x'', y'') gehenden Geraden.

Soll die durch den Punkt (x', y') gehende Gerade (9) auch durch den Punkt (x'', y'') gehen, ſo müſſen x'', y'' der Gleichung (9) genügen, wenn ſie für x, y geſetzt werden, und man hat folglich die Gleichung:

$$A(x'' - x') + B(y'' - y') = 0 \text{ oder } y'' - y' = a(x'' - x'),$$

und wenn man für $a = -\frac{A}{B}$ den ſich aus dieſer letzten Gleichung ergebenden Werth $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ in (9) ſetzt; ſo erhält man für die verlangte Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x'), \\ \text{oder:} \\ (x'' - x') y - (y'' - y') x + x'y'' - x''y' = 0. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Wenn einer der gegebenen Punkte, etwa (x', y'), der Anfangspunkt, alſo $x' = 0$, $y' = 0$ iſt; ſo reducirt ſich die Gleichung (12) auf:

$$y = \frac{y''}{x''} x \text{ oder } x'' y - y'' x = 0.$$

Wenn endlich der eine gegebene Punkt (x', y') auf der Axe der x und der andere auf der Axe der y liegt, alſo $y' = 0$ und $x'' = 0$ iſt; ſo wird die Gleichung (12):

$$x'y + y'' x - x'y'' = 0,$$

oder:

$$\frac{y}{y''} + \frac{x}{x'} = 1,$$

übereinstimmend mit (5).

Soll die durch die Punkte (x', y), (x'', y'') gehende Gerade auch durch den dritten Punkt (x''', y''') gehen, so müssen seine Coordinaten x''', y''' der Gleichung (12) genügen, und man hat folglich zwischen den Coordinaten dreier in gerader Linie liegender Punkte die Bedingungsgleichung:

$$y''' - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x''' - x'). \qquad (13)$$

§. 23.

Parallelismus und Perpendikularität zweier Geraden.

Sollen zwei Gerade:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \text{ oder } y = ax + b, \\ A'x + B'y + C' &= 0 \text{ oder } y = a'x + b' \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

zu einander parallel sein, so muß $a = a'$ oder $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ sein, weil nach dem Obigen (§. 18) in rechtwinkligen Coordinaten

$$\text{tang } \alpha = a = -\frac{A}{B}, \quad \text{tang } \alpha' = a' = -\frac{A'}{B'},$$

und in schiefwinkligen

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\vartheta - \alpha)} = a = -\frac{A}{B}, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin (\vartheta - \alpha')} = a' = -\frac{A'}{B'}$$

ist. Sollen die beiden Geraden (β) aufeinander senkrecht sein, so muß $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$ sein, also:

$$\text{tang } \alpha' = -\text{cotg } \alpha \text{ oder tang } \alpha . \text{tang } \alpha' = -1; \qquad (14)$$

folglich ist die gesuchte Bedingungsgleichung bei rechtwinkligen Coordinaten:

$$a . a' = -1, \text{ also: } a' = -\frac{1}{a}, \text{ oder } \frac{A'}{B'} = -\frac{B}{A}, \qquad (15)$$

und in schiefwinkligen Coordinaten ist (§. 18):

$$\text{tang } \alpha = \frac{a \sin \vartheta}{1 + a \cos \vartheta} = \frac{-A \sin \vartheta}{B - A \cos \vartheta},$$

$$\text{tang } \alpha' = \frac{a' \sin \vartheta}{1 + a' \cos \vartheta} = \frac{-A' \sin \vartheta}{B' - A' \cos \vartheta};$$

mithin die verlangte Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l}(1+a\cos\vartheta)\,(1+a'\cos\vartheta)+aa'\sin^2\vartheta=0,\\ \text{oder:}\\ (A\cos\vartheta-B)\,(A'\cos\vartheta-B')+AA'\sin^2\vartheta=0,\end{array}\right\}\quad(16)$$

oder:

$$A'(A-B\cos\vartheta)+B'(B-A\cos\vartheta)=0,$$

wo a, a' und ϑ ihre frühere Bedeutung haben (§. 18).

Aus diesen verschiedenen Bedingungen folgt: 1) im rechtwinkligen Systeme, daß:

$$\left.\begin{array}{l}Ax+By+C=0\\ Ax+By+C'=0\end{array}\right\}\ \text{oder:}\ \left.\begin{array}{l}y=ax+b\\ y=ax+b'\end{array}\right\}\quad(18)$$

zwei parallele Gerade, und:

$$\left.\begin{array}{l}Ax+By+C=0\\ Bx-Ay+C'=0\end{array}\right\}\ \text{oder:}\ \left.\begin{array}{l}y=ax+b\\ y=-\frac{1}{a}x+b'\end{array}\right\}\quad(19)$$

zwei aufeinander senkrechte Gerade ausdrücken, und wenn die Parallele, oder Senkrechte durch einen gegebenen Punkt (x', y') gehen soll; so sind ihre Gleichungen resp.

$$A(x-x')+B(y-y')=0 \text{ oder } y-y'=a(x-x'),\quad(20)$$

$$B(x-x')-A(y-y')=0 \text{ oder } y-y'=-\frac{1}{a}(x-x').\quad(21)$$

2) In schiefwinkligen Coordinaten bleiben die Gleichungen der Parallele dieselben, und die der durch den Punkt (x', y') gehenden Senkrechten werden:

$$\left.\begin{array}{l}-(B-A\cos\vartheta)(x-x')+(A-B\cos\vartheta)(y-y')=0,\\ \text{oder:}\\ y-y'=-\frac{1+a\cos\vartheta}{a+\cos\vartheta}(x-x').\end{array}\right\}\quad(22)$$

§. 24.

Durchschnittspunkt zweier Geraden.

Um die Coordinaten dieses Durchschnittpunktes zu erhalten, braucht man nur x und y aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}Ax+By+C=0,\\ A'x+B'y+C'=0\end{array}\right\}\ \text{oder:}\ \left.\begin{array}{l}y=ax+b\\ y=a'x+b'\end{array}\right.$$

der beiden Geraden abzuleiten, weil diese Gleichungen für diesen Punkt gleichzeitig erfüllt werden müssen. Man findet leicht:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{B'C - BC'}{A'B - AB'}, \\ y &= \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B'} \end{aligned}\right\} \text{ oder: } \left.\begin{aligned} x &= \frac{b' - b}{a - a'}, \\ y &= \frac{ab' - a'b}{a - a'}. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

§. 25.

Winkel zweier Geraden.

Es ſeien:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= o, \\ A'x + B'y + C' &= o \end{aligned}\right\} \text{ oder: } \left.\begin{aligned} y &= ax + b, \\ y &= a'x + b' \end{aligned}\right.$$

die Gleichungen der beiden Geraden, und φ, α, α' reſp. die Winkel, welche ſie unter ſich und mit der Axe der x machen; ſo iſt $\varphi = \pm(\alpha' - \alpha)$, folglich:

$$\text{tang } \varphi = \pm \frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \alpha}{1 + \text{tang } \alpha' \text{ tang } \alpha}.$$

Nun iſt aber (§. 18):

$$\text{tang } \alpha = \frac{a \sin \vartheta}{1 + a \cos \vartheta}, \quad \text{tang } \alpha' = \frac{a' \sin \vartheta}{1 + a' \cos \vartheta},$$

und wenn man dieſe Werthe in den Werth von tang φ ſubſtituirt; ſo erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang } \varphi &= \pm \frac{(a' - a) \sin \vartheta}{1 + aa' + (a + a') \cos \vartheta} \\ &= \pm \frac{(AB' - BA') \sin \vartheta}{AA' + BB' - (AB' + BA') \cos \vartheta}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Wenn die Axen rechtwinklig ſind, ſo hat man:

$$\text{tang } \varphi = \pm \frac{a' - a}{1 + aa'} = \pm \frac{AB' - BA'}{AA' + BB'}. \quad (25)$$

Die beiden gleichen und entgegengeſetzten Werthe von tang φ beziehen ſich auf die beiden Nebenwinkel, welche die beiden geraden Linien mit einander bilden.

Sollen die beiden Geraden aufeinander ſenkrecht ſein, ſo muß $\varphi = \frac{\pi}{2}$, alſo tang $\varphi = \infty$ ſein; folglich in ſchiefwinkligen Coordinaten:

$$1 + aa' + (a + a') \cos \vartheta = o$$

oder:

$$AA' + BB' - (AB' + BA') \cos \vartheta = o,$$

und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$1 + aa' = 0 \text{ oder } AA' + BB' = 0,$$

übereinſtimmend mit §. 23.

§. 26.

Länge des Perpendikels von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade.

Wenn (x_1, y_1) der gegebene Punkt und:

$$Ax + By + C = 0 \text{ oder } y = ax + b \qquad (1)$$

die Gleichung des gegebenen Geraden iſt, ſo iſt nach §. 23 die Gleichung des von dieſem Punkte auf dieſe Gerade gefällten Perpendikels in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1) \\ \text{oder:} \\ A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0 \end{array}\right\} \qquad (26)$$

und wenn man die Gleichungen (1), (26) als ſimultane betrachtet; ſo ſind die ſich daraus ergebenden Werthe von x, y die Coordinaten des Durchſchnittspunktes beider Geraden. Um aber die Elimination leichter zu bewirken, bringe man die Gleichung (1) auf die Form:

$$\left.\begin{array}{l} A(x-x_1) + B(y-y_1) + Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ \text{oder:} \\ y - y_1 = a(x - x_1) + ax_1 + y_1 + b; \end{array}\right\} \qquad (\mu)$$

alsdann ergibt ſich aus (26) und (μ) leicht:

$$x - x_1 = \frac{a(y_1 - ax_1 - b)}{1 + a^2}, \; y - y_1 = -\frac{y_1 - ax_1 - b}{1 + a^2}, \qquad (27)$$

woraus ſich x, y leicht ergeben.

Setzt man nun die Werthe (27) von $x - x_1$ und $y - y_1$ in den allgemeinen Ausdruck der gegenſeitigen Entfernung zweier Punkte (x_1, y_1), (x, y), d. h. in:

$$P = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2};$$

ſo erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} P = \pm \frac{y_1 - ax_1 - b}{\sqrt{1 + a^2}} \\ \quad = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \end{array}\right\} \qquad (28)$$

wo das Zeichen ſo zu nehmen iſt, daß P poſitiv wird.

Wenn die Coordinaten *ſchiefwinklig* ſind, ſo iſt die Gleichung des Perpendikels:

$$y - y_1 = \frac{-1 - a\cos\vartheta}{a + \cos\vartheta}(x - x_1), \qquad (29)$$

und wenn man dieſe Gleichung mit (μ) verbindet; ſo findet man:

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \frac{(a + \cos\vartheta)(y_1 - ax_1 - b)}{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}, \\ y - y_1 &= \frac{-(1 + a\cos\vartheta)(y_1 - ax_1 - b)}{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Sezt man dieſe Werthe von $x - x_1$, $y - y_1$ in den Ausdruck:

$$P = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + 2(x-x_1)(y-y_1)\cos\vartheta}$$

der gegenſeitigen Entfernung zweier Punkte (x, y), (x_1, y_1) in *ſchiefwinkligen* Coordinaten, ſo erhält man nach verrichteten Reductionen:

$$\left.\begin{aligned} P &= \pm\frac{(y_1 - ax_1 - b)\sin\vartheta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}} \\ &= \pm\frac{(Ax_1 + By_1 + C)\sin\vartheta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\vartheta}}. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Wenn der Punkt (x_1, y_1) der *Anfangspunkt*, alſo $x_1 = o$, $y_1 = o$ iſt, ſo reduciren ſich die Ausdrücke (28) und (31) reſp. auf:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\pm b}{\sqrt{1 + a_2}} = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ P &= \pm\frac{b\sin\vartheta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}} = \pm\frac{C\sin\vartheta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\vartheta}}. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

§. 27.

Länge L einer Geraden, welche mit der Axe der x einen Winkel ϑ bildet und von einem gegebenen Punkte (h, k) nach einer Geraden $Ax + By + C = o$ gezogen iſt.

Wenn (x, y) der Durchſchnittspunkt der beiden Geraden iſt, ſo iſt offenbar in *rechtwinkligen* Coordinaten:

$$x = h + L\cos\vartheta, \quad y = k + L\sin\vartheta,$$

und wenn man dieſe Werthe in die Gleichung $Ax + By + C = o$, welcher ſie genügen müſſen, ſubſtituirt; ſo erhält man:

$$L(A\cos\vartheta + B\sin\vartheta) + Ah + Bk + C = o;$$

folglich:

$$L = \frac{-(C + Ah + Bk)}{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta}. \qquad (34)$$

§. 28.

Gleichung einer Geraden, welche mit der Geraden $Ax + By + C = o$ einen gegebenen Winkel φ bildet.

Wenn α' den Winkel bedeutet, welchen die erſte und α den, welchen die zweite Gerade mit der Axe der x bildet, ſo iſt $\alpha' = \alpha \pm \varphi$; folglich:

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\varphi}{1 \pm \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\varphi} = \frac{-\frac{A}{B} \pm \operatorname{tang}\varphi}{1 \mp \frac{A}{B}\cdot\operatorname{tang}\varphi}$$

$$= \frac{-A\cos\varphi \pm B\sin\varphi}{B\cos\varphi \pm A\sin\varphi}.$$

Nun ſei:

$$A'x + B'y + C' = o$$

die verlangte Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten, ſo wird dieſelbe, wenn man den vorhergehenden Werth von $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{A'}{B'}$ ſubſtituirt:

$$(B\cos\varphi \mp A\sin\varphi)y + (A\cos\varphi \mp B\sin\varphi)x + C'' = o. \qquad (35)$$

Die ähnliche Gleichung in ſchiefwinkligen Coordinaten zu finden.

§. 29.

Gleichung der Geraden, welche durch den Durchſchnittspunkt der beiden Geraden $Ax + By + C = o$, $A'x + B'y + C' = o$ geht.

Dieſe Gleichung iſt offenbar:

$$M(Ax + By + C) \pm N(A'x + B'y + C' = o, \qquad (36).$$

wo M und N willkürliche Parameter ſind, und es iſt ſofort einleuchtend, daß die durch dieſe letzte Gleichung ausgedrückte Gerade durch den Durchſchnittspunkt der beiden gegebenen Geraden geht,

weil die letzte Gleichung durch dieſelben Werthe von x, y erfüllt wird, welche den gegebenen Gleichungen genügen. Die geſuchte Gleichung enthält eigentlich nur einen willkürloſen Parameter, weil man (36) immer durch M, oder N dividiren kann, ohne ihre Allgemeinheit zu beſchränken, ſo daß die Gleichung von der Form:

$$Ax + By + C \pm \lambda (A'x + B'y + C') = 0 \qquad (36)$$

iſt.

§. 30.

Winkel zweier Richtungen.

Wenn α, β und α', β' die Winkel bezeichnen, welche die beiden Richtungen (halben Geraden) mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen bilden, und man denkt ſich durch den Anfangspunkt O (Fig. 33) zwei Parallelen zu dieſen Geraden gezogen und auf denſelben reſp. die willkürlichen Längen OM, OM' genommen; ſo gibt das Dreieck OMM':

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 - \overline{MM'}^2}{2\,OM \cdot OM'} = \frac{x^2+y^2+x'^2+y'^2-(x-x')^2-(y-y')^2}{2\,l\,l'}$$

$$= \frac{xx' + yy'}{ll'},$$

wo x, y; x', y' reſp. die Coordinaten der Punkte M, M' und l, l' die Längen OM, OM' bedeuten. Folglich iſt:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta'. \qquad (37)$$

§. 31.

Polargleichung einer Geraden.

Es ſei O (Fig. 34) der Pol, OX die Polaraxe, M ein beliebiger Punkt der Geraden AA_1, deren Polargleichung geſucht wird, OP = a, Winkel MOP = ϑ, Winkel MPX = β und der Radiusvector OM = ϱ; ſo gibt das Dreieck MOP ſofort:

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\vartheta)} \text{ oder } \varrho = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\vartheta)},$$

welches die Polargleichung der Geraden AA_1 iſt.

Oder man ſetzt die Werthe $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$ in die Orthogonalgleichung:

$Ax + By + C = o$ oder $y = ax + b$

der Geraden, wodurch ſich ergibt:

$$\varrho = \frac{-C}{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta} \text{ oder } \varrho = \frac{b}{\sin\vartheta - a\cos\vartheta}.$$

Umgekehrt kann man, wenn die Polargleichung einer Geraden gegeben iſt, letztere leicht conſtruiren.

Die Lage der Geraden AA_1 wird offenbar ſchon durch den $\vartheta = o$ entſprechenden Werth $OP = a$ von ϱ und durch den $\varrho = \infty$ entſprechenden Werth $NOP = \beta$ von ϑ vollſtändig beſtimmt.

Wenn OP (Fig. 34a) ſenkrecht auf AA_1 iſt, $\angle POX = \alpha$, $\angle MOX = \vartheta$ und $OP = p$ geſetzt wird; ſo gibt das rechtwinklige Dreieck MOP:

$$\varrho\cos(\vartheta - \alpha) = p, \text{ alſo: } \varrho = \frac{p}{\cos(\vartheta - \alpha)}$$

als Polargleichung der Geraden AA_1.

§. 32.

Aufgaben und Lehrſätze zur Uebung.

1) Die Fläche F des Dreieckes BPB′ (Fig. 35) zu finden, wenn die Gleichungen:

$$y = ax + b,\ y = a'x + b' \qquad (\alpha)$$

der Geraden BP, B′P gegeben ſind.

Wenn man OQ ſenkrecht auf OY zieht, ſo iſt offenbar:

$$2F = BB' \cdot PQ = (OB - OB')\,PQ = (b - b')\,PQ,$$

und da PQ nichts anders iſt, als die Abſciſſe x des gemeinſchaftlichen Punktes P der beiden Geraden BP, B′P; ſo muß man x aus den gleichzeitig ſtattfindenden Gleichungen (α) ſuchen, wodurch man erhält:

$$x = \frac{b - b'}{a - a'}.$$

Alſo iſt endlich:

$$F = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b - b')^2}{a - a'}.$$

2) Die Fläche F eines Dreieckes PP′P″ (Fig. 36) zu finden, wenn die Gleichungen:

$$y = ax + b,\ y = a'x + b',\ y = a''x + b''$$

ſeiner drei Seiten BP, B′P′, B″P″ gegeben ſind.

Verlängert man dieſe Seiten, bis ſie die Axe OY reſp. in B, B', B'' ſchneiden, ſo iſt:

$$F = BPB' + B'P''B'' - BP'B'',$$

und folglich nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$F = \tfrac{1}{2}\left[\frac{(b-b')^2}{a-a'} + \frac{(b'-b'')^2}{a'-a''} + \frac{(b-b'')^2}{a-a''}\right].$$

3) Die Fläche F eines Dreieckes PP'P'' (Fig. 37) durch die Coordinaten x, y; x', y'; x'', y'' ſeiner Eckpunkte P, P', P'' auszudrücken.

Es iſt offenbar:

$$F = PMM'P' + P'M'M''P'' - PMM''P''$$
$$= \tfrac{1}{2}(y'+y)(x'-x) + \tfrac{1}{2}(y''+y')(x''-x') - \tfrac{1}{2}(y''+y)(x''-x)$$
$$= \tfrac{1}{2}[(y'+y)(x'-x) + (y''+y')(x''-x') + (y+y'')(x-x'')].$$

Ganz auf dieſelbe Weiſe erhält man für den Flächeninhalt F eines beliebigen Vieleckes, deſſen Eckpunkte die Coordinaten x, y; x', y'; x'', y'' .... x^n, y^n haben, den ſymmetriſchen Ausdruck:

$$F = \tfrac{1}{2}[(y'+y)(x'-x) + (y''+y')(x''-x) + (y'''+y'')(x'''-x'') + \ldots + (y+y^n)(x-x^n)].$$

Bei dieſer Formel iſt zu bemerken: daß die Eckpunkte des Vieleckes, wie ſie in demſelben Sinne aufeinander folgen, numerirt werden müſſen. Das Vieleck braucht jedoch nicht in demſelben Winkel der Coordinatenaxen zu liegen, ſondern dieſe können daſſelbe beliebig durchſchneiden, ohne daß die Formel unbrauchbar wird. Denn wenn die Axen das Vieleck nicht durchſchneiden und man läßt ſie ſich parallel zu ſich ſelbſt ſo weit fortbewegen, bis ſie das Vieleck durchſchneiden; ſo gehen die Coordinaten x, y; x' y', ... reſp. in x+a, y+b; x'+a, y'+b; ... über, wodurch aber die Formel nicht verändert wird, weil ſich alle Glieder mit a und b gegenſeitig aufheben.

Wenn ſich die Seiten des Vieleckes durchkreuzen, ſo wird die Formel unbrauchbar. Aber alsdann kann man die Coordinaten der Durchkreuzungspunkte nach dem Vorhergehenden leicht finden, und die Formel auf die einzelnen Theile des Vieleckes anwenden.

4) Den geometriſchen Ort der Punkte zu finden, welche von zwei gegebenen Punkten (x', y'), (x'', y'') gleichweit abſtehen.

5) Den geometriſchen Ort der Punkte zu finden,

welche von zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden gleichweit entfernt sind.

6) Wenn die Gleichung $y = ax + b$ einer Geraden und außerhalb derselben ein Punkt (x', y') gegeben ist, durch diesen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit der ersten einen gegebenen Winkel bildet.

7) Durch einen Punkt (x', y) eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ gleiche Winkel bildet.

8) Wenn die Gleichungen zweier Geraden folgende sind:

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = p$$
$$y \cos \alpha' - x \sin \alpha' = p',$$

zu zeigen: daß die, den von ihnen gebildeten Winkel halbirende Gerade durch die Gleichung:

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha - p = y \cos \alpha' - x \sin \alpha' - p'$$

ausgedrückt wird.

9) Es ist B (Fig. 38) ein fester Punkt in der Axe OY, Q ein beweglicher Punkt in der Axe OX, $\angle BQP = 90^0$ und das Verhältniß BQ : QP constant; man soll den Ort des Punktes P finden.

10) Wenn O (Fig. 39) die Mitte einer Seite YY' eines Dreieckes YXY' ist, und durch irgend einen Punkt M von OX die Geraden Y'P, YP' gezogen werden, zu zeigen: daß PP' zu YY' parallel ist und OX in den Punkten M, N harmonisch getheilt wird, d. h. so: daß die reciproken Werthe von OM, ON und OX eine arithmetische Proportion bilden.

Nimmt man OX und OY zu den Coordinatenaxen, setzt $OY = OY' = b$, $OM = a$ und $OX = a'$,; so sind die Gleichungen von Y'P und YX resp.:

$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

Für den Punkt P finden diese Gleichungen gleichzeitig statt, und durch Addition ergibt sich daraus:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) x = 2; \quad (\nu)$$

also die Abscisse x des Punktes P:

$$x = \frac{2aa'}{a + a'}.$$

Die Gleichungen von YP′ und Y′X ſind ferner:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a'} + \frac{y}{-b} = 1,$$

woraus ſich ebenſo für die Abſciſſe des Punktes P′ ergibt:

$$x = \frac{2aa'}{a + a'}.$$

Die Punkte P, P′ haben alſo dieſelbe Abſciſſe, und mithin iſt PP′ parallel zu YY′. Endlich iſt nach (ν):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{x},$$

woraus erhellet, daß $\frac{1}{x}$ das arithmetiſche Mittel zwiſchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$ iſt, alſo a, x, a′ eine harmoniſche Proportion bilden, wie auch ſchon aus dem Werthe von x ſelbſt erhellet (ſ. §. 34).

11) Wenn von den beiden ſich ſchneidenden Geraden OX, OY (Fig. 40) die eine OX von den von demſelben Punkte P ausgehenden Geraden PB, PB′, PB″, . . . harmoniſch getheilt wird, ſo wird auch die andere OY durch dieſelben Geraden harmoniſch getheilt; d. h. wenn OA, OA′, OA″, . . . eine harmoniſche Progreſſion bilden, ſo bilden auch OB, OB′, OB″ . . . eine ſolche.

Es ſei OA = a, OA′ = a_1, OA″ = a_2, . . .; OB = b, OB′ = b_1. OB″ = b_2, . . . und h, k die Coordinaten des Punktes P; ſo ſind die Gleichungen von AB, A′B′, A″B″, . . . reſp.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1, \text{ ꝛc.}$$

und da ſich dieſe Geraden alle in P ſchneiden, ſo hat man auch:

$$\frac{h}{a} + \frac{k}{b} = 1, \frac{h}{a_1} + \frac{k}{b_1} = 1, \text{ ꝛc.}$$

Aus dieſen letzten Gleichheiten ergibt ſich durch Subtraction:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right)h + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right)k = 0, \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)h + \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right)k = 0, \text{ ꝛc.}$$

und da a, a_1, a_2, . . . eine harmoniſche Progreſſion bilden; ſo iſt:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \ldots\ldots$$

alſo auch:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} = \ldots\ldots$$

und mithin bilden $b, b_1, b_2, \ldots$ eine harmoniſche Progreſſion.

12) Die beiden Winkelſpitzen A, B eines beweglichen Dreieckes ABC liegen ſtets in zwei feſten Geraden OX, OY und die Richtungen der Seiten dieſes Dreieckes gehen ſtets durch drei feſte, in gerader Linie liegende Punkte; man ſoll zeigen: daß ſich die Winkelſpitze C ſtets auf einer durch O gehenden Geraden befindet.

Die Gleichungen der Geraden AB, AC, BC in Beziehung auf OX, OY als Axen ſeien reſp.:

$$\alpha x + \beta y = 1, \quad (1)$$
$$\alpha x + \beta' y = 1, \quad (2)$$
$$\alpha' x + \beta y = 1. \quad (3)$$

Da AB und AC ſich auf OX ſchneiden, ſo müſſen die Gleichungen (1) und (2) für $y = o$ denſelben Werth von x geben, und da AB, BC ſich auf OY ſchneiden, ſo müſſen (1) und (3) für $y = o$ denſelben Werth von x geben. Ferner ſeien (h, k), (h', k'), (h'', k'') die drei Punkte, durch welche die Geraden (1), (2), (3) ſtets gehen, und die Gleichung der Geraden, worin dieſe Punkte liegen, ſei:

$$mx + ny = 1. \quad (4)$$

Da die Punkte (h, k'), (h', k''), (h'', k) reſp. (1) und (4), (2) und (4), (3) und (4) gemeinſchaftlich ſind, ſo müſſen dieſe drei Paare von Gleichungen durch die reſp. Coordinaten dieſer Punkte gleichzeitig erfüllt werden, und man hat:

$$(1) - (4) \ldots\ldots (\alpha - m)\, h + (\beta - n)\, k = o,$$
$$(2) - (4) \ldots\ldots (\alpha - m)\, h' + (\beta' - n)\, k' = o,$$
$$(3) - (4) \ldots\ldots (\alpha' - m)\, h'' + (\beta - n)\, k'' = o,$$

woraus erhellet: daß die Größen $\alpha - m$, $\beta - n$, $\alpha' - m$ und $\beta' - n$ in einem conſtanten Verhältniß zu einander ſtehen, ſo daß auch $[(\alpha - m) - (\alpha' - m)] : [(\beta - n) - (\beta' - n)]$ ein conſtantes Verhältniß $\frac{A}{B}$ iſt, und folglich:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'} = \frac{A}{B}. \quad (5)$$

Für den Durchſchnittspunkt C von (2) und (3) müſſen dieſe beiden Gleichungen gleichzeitig ſtattfinden, ſo daß man hat:

$$(2) - (3) \ldots (\alpha - \alpha')\,x - (\beta - \beta')\,y = 0,$$

oder wegen (5):

$$Ax - By = 0,$$

welches die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden ist, worauf sich die Spitze C immer befindet.

13) Wenn zwei Dreiecke ABC, A'B'C' so beschaffen sind: daß die Durchschnittspunkte von AB und A'B', von BC und B'C', von AC und A'C' in derselben Geraden liegen, zu zeigen: daß sich die drei Geraden AA', BB', CC' in demselben Punkte schneiden.

14) Wenn OX, OY, AB (Fig. 41) drei feste Gerade sind und A'B' eine sich um den Punkt P drehende Gerade ist, zu zeigen: daß, wenn stets $OA' + OB' = OA + OB$ ist, das Verhältniß $B'P : B'A'$ constant ist.

15) Wenn sich die Gerade DE (Fig. 42) so bewegt, daß sie stets zu der Seite BC des Dreieckes ABC parallel ist, den Ort des Punktes O zu finden.

Wenn man AC, AB zu den Coordinatenaxen nimmt und $AC = a$, $BA = b$ setzt, so ist die Gleichung der Geraden BC:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Setzt man ferner $AE = x'$, $AD = y'$, so ist die Gleichung der Geraden DE:

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 1,$$

und da diese beiden Geraden parallel sein sollen; so ist:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}. \qquad (\mu)$$

Weiter sind die Gleichungen der Geraden CD, BE resp.:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{y'} = 1, \quad \frac{x}{x'} + \frac{y}{b} = 1,$$

und da diese Gleichungen für den Durchschnittspunkt O gleichzeitig stattfinden müssen; so erhält man durch Subtraction der letzten von der ersten:

$$\left(\frac{1}{y'} - \frac{1}{b}\right)y + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x'}\right)x = 0.$$

Wegen (μ) ist aber $y' = \frac{bx'}{a}$, und wenn man diesen Werth

in die letzte Gleichung setzt und dann durch $\frac{a}{x'} - 1$ dividirt; so ergibt sich endlich:

$$y = \frac{b}{a} x,$$

welches die Gleichung des geometrischen Ortes des Punktes O ist. Da derselben sowohl durch $x = o$, $y = o$, als durch $x = \frac{a}{2}$ $y = \frac{b}{2}$ genügt wird, so folgt: daß der gesuchte Ort nichts anders ist, als eine durch die Winkelspitze A und durch die Mitte der Seite BC gehende Gerade. Diese Aufgabe ist theilweise die Umkehrung von Aufgabe 10.

16) Wenn die Gleichungen $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ zweier Geraden gegeben sind, die Gleichung des geometrischen Ortes des Punktes P zu finden, dessen Abstände von diesen Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

17) Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche durch die beiden Durchschnittspunkte der Geraden:

$$y + ax + b = o, \quad y + a'x + b' = o, \qquad (1)$$

und der Geraden:

$$y + mx + n = o, \quad y + m'x + n' = o, \qquad (2)$$

geht.

Die Gleichungen der beiden Geraden, welche resp. durch die Durchschnittspunkte der Geraden (1) und (2) gehen, sind nach §. 29:

$$(y + ax + b) + \lambda (y + a'x + b') = o, \qquad (3)$$

$$(y + mx + n) + \lambda' (y + m'x + n') = o, \qquad (4)$$

und damit die Geraden (3), (4) in eine zusammenfallen, müssen die beiden letzten Gleichungen identisch, d. h.:

$$y + \frac{a + \lambda a'}{1 + \lambda} x + \frac{b + \lambda b'}{1 + \lambda} = y + \frac{m + \lambda' m'}{1 + \lambda'} x + \frac{n + \lambda' n'}{1 + \lambda'},$$

folglich:

$$\frac{a + \lambda a,}{1 + \lambda} = \frac{m + \lambda' m'}{1 + \lambda'} \text{ und } \frac{b + \lambda b'}{1 + \lambda} = \frac{n + \lambda' n'}{1 + \lambda'} \qquad (5)$$

sein. Aus den beiden Gleichungen (5) ergeben sich die Werthe der willkürlichen Multiplicatoren λ, λ', und wenn man ihre Werthe in (3) und (4) setzt; so erhält man die gesuchte Gleichung zweimal. Man könnte auch zuerst den Durchschnittspunkt der Geraden (1),

so wie den von (2) suchen (§. 24), und dann die Gleichung der Geraden, welche durch diese beiden Punkte geht. (§. 22).

18) Es ist ein fester Punkt A (Fig. 43) und eine feste Gerade BC gegeben; ferner ist der Winkel PAM $=$ P'AM' $=$ . . . . und $\frac{AP}{AM} = \frac{AP'}{AM'} =$ . . . Man soll zeigen: daß der Ort der Punkte M, M', . . . eine Gerade ist.

19) Von einem festen Punkte werden nach einer festen Geraden beliebig viele gerade Linien gezogen und alle in demselben Verhältnisse getheilt; man soll den Ort der Theilungspunkte finden.

20) Durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche in diesem Punkte halbirt wird.

§. 33.

Harmonische Proportion.

Auf derselben geraden Linie seien a' und a (Fig. 44) zwei feste Punkte, und b, b' zwei andere Punkte von solcher Beschaffenheit, daß:

$$\frac{a\,b}{a'b} : \frac{ab'}{a'b'} = -1 \qquad (1)$$

ist; so sagt man: diese vier Punkte bilden eine harmonische Proportion, oder die beiden Punkte b, b' sind in Bezug auf a und a' harmonisch conjugirt, wobei übrigens die Abstände positiv, oder negativ sind, jenachdem sie in dem einen, oder in dem andern Sinne genommen sind. Offenbar liegt der eine harmonisch conjugirte Punkt, z. B. b, in dem Intervalle aa', während der andere b' außerhalb desselben liegt. Denn wenn ein Punkt außerhalb des Intervalles liegt, so haben seine beiden Abstände einerlei Zeichen, und folglich ist der entsprechende Quotient positiv; aber wenn dieser Punkt in dem Intervalle liegt, so haben seine Abstände entgegengesetzte Zeichen, und folglich ist der entsprechende Quotient negativ. Umgekehrt, da die Relation (1) auch folgendermaßen gestellt werden kann:

$$\frac{ba}{b'a} : \frac{ba'}{b'a'} = -1,$$

so sind auch a, a' in Beziehung auf b, b' harmonisch conjugirt.

Wenn ein Punkt b gegeben iſt, ſo kann man leicht ſeinen harmoniſch conjugirten b′ finden. Dann zieht man durch a und a′ zwei Parallelen am = ab und a′m′ = a′b, ſo ſchneidet die Gerade mm′ die gegebene Gerade in dem geſuchten conjugirten Punkte b′. Wenn der Punkt b′ gegeben wäre, ſo nähme man an = ab′ und in entgegengeſetztem Sinne a′n′ = a′b′, und alsdann beſtimmt nn′ den Punkt b.

Für die Mitte i von aa′ wird die Relation (1):

$$bi : b'i = \overline{ai}^2 \text{ oder } \frac{bi}{b'i} = \frac{\overline{ba}^2}{\overline{b'a}^2} = \frac{\overline{ba'}^2}{\overline{b'a'}^2}.$$

§. 34.

Harmoniſcher Strahlenbüſchel.

Wenn man irgend einen Punkt O (Fig. 45) der Ebene mit den vier Punkten a, a′, b, b′ durch die Geraden A, A′, B, B′ verbindet, ſo findet die Relation ſtatt:

$$\frac{\sin(A, B)}{\sin(A', B)} : \frac{\sin(A, B')}{\sin(A', B')} = -1, \qquad (2)$$

wobei die in dem einen Sinne gezählten Winkel als poſitiv und die in dem entgegengeſetzten Sinne als negativ betrachtet werden. Denn wenn das von dem Punkte O auf aa′ gefällte Perpendikel mit h bezeichnet wird, ſo hat man:

$$ab = \frac{oa \cdot ob \cdot \sin(A, B)}{h}, \ldots,$$

und wenn man in die Relation (1) ſubſtituirt; ſo erhält man die Relation (2), und umgekehrt aus (2) ergibt ſich (1). Die vier Geraden A, A′, B, B′, welche Strahlen heißen, bilden alsdann ein ſogenanntes harmoniſches Strahlenbüſchel.

Man kann für eine Gerade ihre Verlängerung ſetzen, wenn man zu zwei Winkeln π addirt; denn alsdann ändern zwei Sinus ihr Zeichen, und die Relation (2) findet noch ſtatt. Die vier Geraden können folglich in beiden Richtungen unbeſtimmt verlängert gedacht werden. Wenn man durch das harmoniſche Strahlenbüſchel irgend eine Sekante zieht, ſo beſtimmt daſſelbe auf dieſer Geraden vier harmoniſche Punkte. Wenn die Sekante zu einer der vier Geraden (Strahlen) parallel iſt, ſo entfernt ſich der Punkt b′ ins Unendliche; es wird $\frac{ab'}{a'b'} = 1$, $ab = -a'b$ und der

Punkt b die Mitte von aa'. Wenn zwei conjugirte Gerade B,B' einen rechten Winkel bilden, so halbiren sie die beiden von A und A' gebildeten Winkel. Denn alsdann ist $(A,B') = \frac{\pi}{2} + (A,B)$, $(A',B') = \frac{\pi}{2} + (A',B)$, und die Relation (2) wird:

$$\text{tang}\,(A,B) = -\,\text{tang}\,(A',B),$$

also:

$$(A,B) = -\,(A',B),$$

und mithin ist B eine Halbirungslinie. *)

---

*) Man sagt nämlich, daß drei Größen oder Zahlen α, β, γ eine harmonische Proportion bilden, wenn man hat:

$$\alpha - \beta : \beta - \gamma = \alpha : \gamma, \qquad (1')$$

d. h. wenn sich die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl oder Größe zu der zwischen der zweiten und dritten, wie die erste zur dritten verhält. Die zweite Zahl oder Größe β heißt das harmonische Mittel zwischen der ersten und dritten α, γ.

Aus (1') folgt:

$$\alpha\beta + \beta\gamma = 2\,\alpha\gamma, \qquad (2')$$

also:

$$\beta = \frac{2\,\alpha\beta}{\alpha+\gamma}.$$

Wenn eine Reihe von Größen oder Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ so beschaffen sind, daß je drei aufeinanderfolgende eine harmonische Proportion bilden, so heißt jene Reihe eine harmonische Progression, und hat die Eigenschaft: daß die reciproken Werthe ihrer Glieder eine arithmetische Progression bilden, und umgekehrt: die reciproken Werthe der Glieder einer arithmetischen Progression bilden eine harmonische Progression. Denn sind $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$ die Glieder der arithmetischen Progression, so ist:

$$\beta' - \alpha' = \gamma' - \beta' = \delta' - \gamma' = \ldots.$$

also:

$$\alpha' + \gamma' = 2\beta',\ \beta' + \delta' = 2\chi', \ldots.$$

und wenn man jede dieser letzten Gleichungen resp. durch das Produkt der drei darin vorkommenden Größen, d. h. resp. durch $\alpha'\beta'\gamma'$, $\beta'\gamma'\delta', \ldots$ dividirt; so kommt:

$$\frac{1}{\beta'\gamma'} + \frac{1}{\alpha'\beta'} = \frac{2}{\alpha'\gamma'},\ \frac{1}{\gamma'\delta'} + \frac{1}{\beta'\gamma'} = \frac{2}{\beta'\delta'}, \ldots.$$

Wegen $\alpha = \frac{1}{\alpha'}$, $\beta = \frac{1}{\beta'}$, $\gamma = \frac{1}{\gamma'}$, $\delta = \frac{1}{\gamma'}$, ... hat man also:

$$\beta\gamma + \alpha\beta = 2\,\alpha\gamma,\ \gamma\delta + \beta\gamma = 2\beta\,\delta, \ldots$$

Umgekehrt, wenn B einen der von A und A′ gebildeten Winkel halbirt, so ist B′ die Halbirungslinie des andern Winkels, und die beiden conjugirten Geraden sind aufeinander senkrecht.

§. 35.

Wenn man von einem festen Punkte I (Fig. 46)

---

und mithin bilden $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ wegen (2′) eine harmonische Progression.

Wenn also $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ eine harmonische Progression bilden, so bilden $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}, \ldots$ eine arithmetische, und folglich ist:

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} = \ldots = \text{const.}$$

Aus (2′) folgt ferner durch Division mit $\alpha\beta\gamma$:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}. \qquad (3')$$

Verhält sich nun (Fig. 44):

$$ab : a'b = ab' : a'b' \text{ oder } a'b' : a'b = ab' : ab, \qquad (4')$$

so bilden die drei Linien ab′, aa′ und ab eine harmonische Proportion, weil man die vorhergehende Proportion auch wie folgt schreiben kann:

$$ab' - aa' : aa' - ab = ab' : ab,$$

und man sagt aus diesem Grunde: die Gerade aa′ werde in den Punkten b,b′ harmonisch getheilt.

Umgekehrt wird auch die Gerade bb′ durch die Punkte a,a′ harmonisch getheilt; denn aus der Proportion (4′) folgt:

$$ab : a'b = ab' : a'b' \qquad (5')$$

wofür man setzen kann:

$$ab' - bb' : bb' - a'b' = ab' : a'b'.$$

Aus der Proportion (5′) folgt ferner:

$$ab - a'b : ab + a'b : ab' - a'b' : ab' + a'b'$$

d. h.:

$$2ib : 2ai = 2ai : 2ib',$$

also:

$$\overline{ai}^2 = ib \cdot ib'. \qquad (6')$$

Endlich folgt aus der Proportion (5′):

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{a'b}{a'b'} = \frac{ab - a'b}{ab' - a'b'} : \frac{ib}{ia'}$$

folglich:

$$\frac{\overline{ab}^2}{\overline{ab'}^2} : \frac{\overline{a'b}^2}{\overline{a'b'}^2} = \frac{\overline{ib}^2}{\overline{ia}^2} = \frac{\overline{ib}^2}{ib \cdot ib'} = \frac{ib}{ib'},$$

indem man die Relation (6′) beachtet.

noch zwei ſich in O ſchneidenden Geraden OX, OY zwei beliebige Sekanten IBA, IB'A' zieht und die Durchſchnittspunkte B, A' und A, B' durch gerade Linien verbindet; ſo iſt der geometriſche Ort des Durchſchnittspunktes K der Verbindungslinien eine durch O gehende Gerade.

Nimmt man OX, OY zu den Coordinatenaxen, bezeichnet die Coordinaten des Punktes I mit x_1, y_1 die Abſciſſen der Punkte A, A' mit x', x'' und die Ordinaten der Punkte B, B' mit y', y''; ſo ſind die Gleichungen der Geraden AB und A'B' reſp.:

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 1 \text{ und } \frac{x}{x''} + \frac{y}{y''} = 1,$$

und da dieſe Geraden durch den Punkt I oder (x_1, y_1) gehen; ſo hat man die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x_1}{x'} + \frac{y_1}{y'} = 1 \text{ und } \frac{x_1}{x''} + \frac{y_1}{y''} = 1. \qquad (3)$$

Die Gleichungen der Geraden BA', AB' ſind ferner:

$$\frac{x}{x''} + \frac{y}{y'} = 1, \frac{x}{x'} + \frac{y}{y''} = 1, \qquad (4)$$

und wenn man dieſe letzten Gleichungen als ſimultane betrachtet, ſo ſind x, y die Coordinaten des Durchſchnittspunktes K. Durch Subtraktion ergibt ſich aus (4):

$$\frac{x' - x''}{x' x''} x - \frac{y' - y''}{y' y''} y = 0,$$

und ebenſo aus (3):

$$\frac{x' - x''}{x' x'} x_1 - \frac{y' - y''}{y' y''} y_1 = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{y}{x} = -\frac{y_1}{x_1}. \qquad (5)$$

Der Ort des Punktes K iſt alſo eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade OK, welche allen Punkten von OI entſpricht; und umgekehrt: alle Punkte von OK geben denſelben Ort OI. Die Gerade OK wird die Polare des Punktes I in Beziehung auf das Syſtem der beiden Geraden OX, OY genannt.

Da man hat:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(XOK)}{\sin(YOK)}, \frac{y_1}{x_1} = -\frac{\sin(XOI)}{\sin(YOI)},$$

ſo wird die Gleichung (5):

$$\frac{\sin(X,K)}{\sin(Y,K)} : \frac{\sin(X,I)}{\sin(Y,I)} = -1.$$

Die beiden Geraden OI, OK ſind alſo in Beziehung auf OX, OY harmoniſch conjugirt.

Der Punkt H iſt alſo in Beziehung auf A, B der harmoniſch conjugirte von I, und wenn man durch den Punkt I verſchiedene Sekanten AB durch den Winkel XOI zieht; ſo kann die Polare des Punktes I als der Ort des harmoniſch conjugirten Punktes von I in Bezug auf die beiden Endpunkte B, A jeder Sekante betrachtet werden.

Ein Syſtem von vier unbegrenzten Geraden (Fig. 47), welche ſich in ſechs Punkten ſchneiden, heißt ein vollſtändiges Viereck, deſſen Winkelſpitzen dieſe Durchſchnittspunkte ſind. Wenn man die gegenüberliegenden Spitzen paarweiſe durch gerade Linien verbindet, ſo erhält man drei Diagonalen AA′, BB′, CC′, wovon jede durch die beiden andern harmoniſch getheilt wird; denn nach dem vorhergehenden Satze bilden die vier Geraden MA, MB, MA′ und MC ein harmoniſches Strahlenbüſchel, und mithin die vier Punkte A, A′, N, P eine harmoniſche Proportion.

Es läßt ſich auch leicht zeigen, daß die Mittelpunkte D, E, F der drei Diagonalen AA′, BB′, CC′ eines vollſtändigen Viereckes in gerader Linie liegen. Denn nimmt man AC, AC′ reſp. zu den Axen der x, y und ſetzt AB = x′, AC = x″, AB′ = y′, AC′ = y″, ſo ſind die Coordinaten des Punktes E : $\frac{x'}{2}$, $\frac{y'}{2}$ und die des Punktes F : $\frac{x''}{2}$, $\frac{y''}{2}$. Sind ferner x_1, y_1 die Coordinaten des Punktes A′, ſo ſind die des Punktes D offenbar $\frac{x_1}{2}$, $\frac{y_1}{2}$. Um nun zu beweiſen, daß die drei Punkte D, E, F in gerader Linie liegen, braucht man nur zu zeigen, daß die Winkel- oder Richtungscoefficienten der beiden Geraden, welche einen der drei fraglichen Punkte D mit den beiden andern E, F verbinden, gleich ſind, und folglich dieſe beiden Geraden zuſammenfallen.

Da die drei Punkte B, A′, C′ in gerader Linie liegen, ſo haben die beiden Geraden A′B, A′C′ gleiche Richtungscoefficienten:

$$\frac{y_1}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y''}{x_1},$$

und ebenso haben die Geraden A'C, A'B' gleiche Richtungscoefficienten:

$$\frac{y_1}{x_1 - x''} = \frac{y_1 - y'}{x_1}.$$

Durch Division folgt aus diesen beiden Relationen:

$$\frac{x_1 - x'}{x_1 - x''} = \frac{y_1 - y'}{y_1 - y''},$$

oder:

$$\frac{\frac{y_1}{2} - \frac{y'}{2}}{\frac{x_1}{2} - \frac{x'}{2}} = \frac{\frac{y_1}{2} - \frac{y''}{2}}{\frac{x_1}{2} - \frac{x''}{2}}.$$

Die beiden Geraden DE, DF haben also gleiche Richtungscoefficienten, fallen also in eine Gerade zusammen, und mithin liegen die drei Punkte D, E, F in gerader Linie.

§. 36.

Mittelpunkt der proportionalen Abstände.

1) Wenn zwei Punkte A, B (Fig. 47a) gegeben sind, auf der Geraden AB einen solchen Punkt M zu finden, daß seine Abstände von A, B sich wie m : n verhalten.

Der Abstand AM wird als positiv, oder negativ betrachtet, jenachdem derselbe in dem Sinne AB, oder in entgegengesetztem Sinne genommen ist, und der Abstand BM als positiv, oder negativ, jenachdem er in dem Sinne BA, oder in entgegengesetztem Sinne gezählt wird. Wenn also m und n dasselbe Zeichen haben, so liegt der Punkt M in dem Intervalle AB, und wenn m, n entgegengesetzte haben, so liegt derselbe auf der Verlängerung von AB, und zwar auf der Seite von A, oder von B, jenachdem $m \lesseqgtr n$ ist. Wenn x', y'; x'', y'' die Coordinaten der gegebenen Punkte A, B und x, y die des gesuchten Punktes M bezeichnen, so hat man offenbar:

$$x - x' : x'' - x = m : n,$$
$$y - y' : y'' - y = m : n,$$

woraus folgt:

$$x = \frac{nx' + mx''}{m + n}, \quad y = \frac{ny' + my''}{m + n}, \qquad (6)$$

und wenn $m = n$ iſt; ſo erhält man den Mittelpunkt von AB:

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2}.$$

2) In einer Ebene ſeien n Punkte A,B,C,D,... (Fig. 47b) oder (x', y'), (x'', y''), ... $(x^{(n)}, y^{(n)})$ und n Größen $m', m'', \ldots m^{(n)}$, welche dieſen Punkten entſprechen, gegeben. Auf der die beiden erſten Punkte A, B verbindenden Geraden AB nimmt man einen ſolchen Punkt N_1, daß die Abſtände deſſelben von den beiden erſten Punkten in dem Verhältniſſe $m'' : m'$ ſtehen, dann auf der Geraden N_1C, welche N_1 mit dem dritten gegebenen Punkte C verbindet, einen ſolchen Punkt N_2, daß ſeine Abſtände von N_1 und dem dritten gegebenen Punkte C in dem Verhältniſſe $m''' : (m' + m'')$ ſtehen, hierauf auf der Geraden N_2D, welche N_2 mit dem vierten gegebenen Punkte D verbindet, einen ſolchen Punkt N_3, daß ſeine Abſtände von N_2 und dieſem vierten Punkte D in dem Verhältniſſe $m'''' : (m' + m'' + m''')$ ſtehen, u. ſ. f. bis zu dem letzten gegebenen Punkte. Man ſoll die Coordinaten des letzten Theilungspunktes finden.

Wenn die Coordinaten der ſucceſſiven Theilungspunkte N_1, N_2, N_3, ... N reſp. mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ...; x, y bezeichnet werden; ſo iſt nach den Formeln (6):

$$x_1 = \frac{m'x' + m''x''}{m' + m''},$$

$$x_2 = \frac{(m'+m'')x_1 + m'''x'''}{m' + m'' + m'''} = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x'''}{m' + m'' + m'''},$$

$$x_3 = \frac{(m'+m''+m''')x_2 + m''''x''''}{m' + m'' + m''' + m''''} = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x''' + m''''x''''}{m' + m'' + m''' + m''''}$$

$$\text{2c.} = \text{2c.}$$

$$x = \frac{m'x' + m''x'' + \ldots + m^{(n)}x^{(n)}}{m' + m'' + \ldots + m^{(n)}},$$

und ebenſo:

$$y = \frac{m'y' + m''y'' + \ldots + m^{(n)}y^{(n)}}{m' + m'' + \ldots + m^{(n)}}. \qquad (7)$$

Hieraus ſieht man: daß die Lage des letzten Theilungspunktes von der Ordnung, in welcher man die gegebenen Punkte nimmt, unabhängig iſt. Dieſer Punkt kann der Mittelpunkt der den Größen $m', m'', m''' \ldots m^{(n)}$ proportionalen Abſtände genannt werden, und wenn $m' = m'' = m''' = \ldots = m^{(n)}$ iſt; ſo erhält man den Mittelpunkt der mitt-

lern Abſtände oder Entfernungen, deſſen Coordinaten ſind:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + x'' + x''' + \ldots + x^{(n)}}{n}, \\ y &= \frac{y' + y'' + y''' + \ldots + y^{(n)}}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

§. 37.

Anwendung auf das Dreieck.

Wenn blos drei Punkte A, B, C (Fig. 47c) gegeben ſind, welche die Winkelſpitzen eines Dreieckes bilden; ſo kann man auf drei verſchiedene Arten verfahren. Man kann nämlich zuerſt den Theilungspunkt A′ der Seite BC und dann den Mittelpunkt O auf AA′ ſuchen, oder den Theilungspunkt B′ der Seite CA und darauf den Mittelpunkt O auf BB′, oder ꝛc. Der Mittelpunkt O der proportionalen Abſtände iſt alſo der Durchſchnittspunkt der drei Geraden AA′, BB′, CC′. Wenn m′, m″, m‴ die den drei Punkten A, B, C entſprechenden Größen ſind, ſo werden die drei Punkte A′, B′, C′ durch die Relationen:

$$\frac{BA'}{m'''} = \frac{CA'}{m''}, \quad \frac{CB'}{m'} = \frac{AB'}{m'''}, \quad \frac{AC'}{m''} = \frac{BC'}{m'}$$

beſtimmt, woraus folgt:

$$BA' \cdot CB' \cdot AC' = BC' \cdot AB' \cdot CA'. \quad (9)$$

Umgekehrt, wenn die drei Punkte A′, B′, C′ der Relation (9) genügen, ſo kann man die drei Größen m′, m″, m‴ finden. Hieraus folgt:

1) Wenn man auf den drei Seiten eines Dreieckes drei Punkte von ſolcher Beſchaffenheit nimmt, daß das Produkt aus drei nicht aneinanderliegenden Seitenabſchnitten dem Produkte der drei andern Abſchnitte gleich iſt; ſo durchſchneiden ſich die drei Geraden, welche dieſe Punkte mit den gegenüberliegenden Winkelſpitzen verbinden, in demſelben Punkte.

2) Wenn $m' = m'' = m'''$ iſt, ſo ſind A′, B′, C′ die Mitten der Dreiecksſeiten; folglich gehen die drei Mediannen eines Dreieckes durch denſelben Punkt, welches der

Schwerpunkt des Dreieckes ist. Die Coordinaten dieses Punktes sind:

$$x = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$$

3) Wenn $m' = a$, $m'' = b$, $m''' = c$ ist, wo a, b, c die drei Seiten des Dreieckes bedeuten; so sind die Geraden AA′, BB′, CC′ die Halbirungslinien der Winkel des Dreieckes. Folglich gehen die Halbirungslinien der Winkel eines Dreieckes durch denselben Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises und seine Coordinaten sind:

$$x = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \quad y = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}.$$

4) Wenn man aus den Winkelspitzen des Dreieckes Perpendikel auf die Gegenseiten zieht, so geben die dadurch entstehenden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke:

$a \,.\, BA' = c \,.\, BC'$, $b \,.\, CB' = a \,.\, CA'$, $c \,.\, AC' = b \,.\, AB'$,

woraus folgt:

$$BA' \,.\, CB' \,.\, AC' = BC' \,.\, AB' \,.\, CA',$$

und mithin gehen die drei Höhen eines Dreieckes durch denselben Punkt. Dasselbe Resultat erhält man, wenn man setzt:

$m' = a \cos B \cos C$, $m'' = b \cos A \cos C$, $m''' = c \cos A \cos B$;

denn alsdann sind AA′, BB′, CC′ die Höhen des Dreieckes, und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes sind:

$$x = \frac{ax' \cos B \cos C + bx'' \cos A \cos C + cx''' \cos A \cos B}{a \cos B \cos C + b \cos A \cos C + c \cos A \cos B},$$

$$y = \frac{ay' \cos B \cos C + by'' \cos A \cos C + cy''' \cos A \cos B}{a \cos B \cos C + b \cos A \cos C + c \cos A \cos B}.$$

§. 38.

Transversalen.

Zwei Punkte B′, C′ (Fig. 48) können willkürlich angenommen werden und der dritte A′ wird durch die Gerade OA bestimmt. Die willkürliche Transversale B′C′ trifft die dritte Seite in dem Punkte A_1, welcher der harmonisch conjugirte von A′ ist (§. 35), so daß man hat:

$$\frac{BA'}{CA'} : \frac{BA_1}{CA_1} = -1,$$

und wenn man in die Relation (9) substituirt:

$$BA_1 . CB' . AC' = - BC', AB' . CA_1 . \quad (10)$$

Umgekehrt, wenn drei Punkte A_1, B', C' der Gleichheit (10) genügen, so liegen sie in derselben Geraden.

Wenn man also auf den drei Seiten eines Dreieckes drei Punkte von solcher Beschaffenheit nimmt, daß das Produkt aus drei nicht aneinanderstoßenden Seitenstücken dem Produkte aus den drei andern Stücken gleich ist, aber ein entgegengesetztes Vorzeichen hat; so liegen diese drei Punkte in gerader Linie.

Ebenso liegen die drei conjugirten Punkte A_1, B_1, C_1 von A', B', C' in gerader Linie, und wenn man einen Punkt A', so wie die conjugirten Punkte B_1, C_1 mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen verbindet; so schneiden sich die Verbindungslinien in demselben Punkte. Ferner liegen die Mittelpunkte von $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ in gerader Linie, d. h. die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Viereckes liegen in derselben Geraden, wie bereits früher direkt gezeigt ist (§. 35).

§. 39.

Man kann auch leicht den Ort der Punkte finden, welche so beschaffen sind: daß die Summe der Produkte aus den Quadraten ihrer Entfernungen von einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte (x', y'), (x'', y''), ... und ebensovielen constanten Größen m', m'', ... einer gegebenen Größe K gleich ist.

Denn in rechtwinkligen Coordinaten ist die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$m'[(x-x')^2+(y-y')^2]+m''[(x-x'')^2+(y-y'')^2]+\ldots=K.$$

oder:

$$\left[x-\frac{m'x+m''x''+\ldots}{m'+m''+\ldots}\right]^2+\left[y-\frac{m'y'+m''y''+\ldots}{m'+m''+\ldots}\right]^2=\text{Const.} \quad (11)$$

Der gesuchte Ort ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem der proportionalen Entfernungen zusammenfällt. Wenn $m'+m''+\ldots=0$ ist, so ist der Ort eine Gerade.

Wenn man $m' = m'' = \ldots = 1$ setzt, und den Anfangs-

punkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der mittlern Entfernungen verlegt; so reducirt sich die Gleichung (11) auf:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{n}(K - x'^2 - y'^2 - x''^2 - y''^2 - \ldots).$$

Bezeichnet man also mit D', D'', . . . D die Entfernungen irgend eines Punktes (x, y) von den gegebenen Punkten und vom Mittelpunkte ihrer mittlern Abstände, und mit d', d'', . . . die Abstände des Kreismittelpunktes von denselben Punkten; so hat man:

$$K = \Sigma . D^2 = \Sigma . d^2 + n D^2.$$

Hieraus sieht man: daß die Summe der Quadrate der Entfernungen eines beweglichen Punktes von den verschiedenen Punkten eines Systemes ein Minimum ist, wenn dieser Punkt mit dem Mittelpunkte der mittlern Entfernungen zusammenfällt.

Als besonderer Fall ergibt sich aus dem Vorhergehenden für den Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten a, a' sich wie m : n verhalten, die Gleichung:

$$n^2[(x - x')^2 + (y - y')^2] - m^2[(x - x'')^2 + (y - y'')^2] = 0.$$

Theilt man die Gerade aa' im Punkte b in zwei Theile, welche sich wie m : n verhalten und sucht zu b den harmonisch conjugirten Punkt b'; so ist bb' der Durchmesser des Kreises; welcher den geometrischen Ort bildet.

§. 40.

Wenn A', A'', A''', . . . mehrere in derselben Geraden liegende Punkte und x', x'', x''' . . . ihre Abscissen in Bezug auf den Punkt I derselben Geraden sind, so nennt man den Mittelpunkt der den Größen $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{x''}$, $\frac{1}{x'''}$, ... proportionalen Entfernungen den Mittelpunkt der harmonischen Mittel jener Punkte in Beziehung auf I. Ist G dieser Mittelpunkt, und man zieht aus einem beliebigen Punkte M der Ebene die Geraden MA', MA'', . . . MI, MG und eine Transversale, welche diese in den Punkten a', a'', . . . i, g schneidet; so ist g der Mittelpunkt der harmonischen Mittel von a', a'', . . . in Beziehung auf I.

§. 41.

Wenn A', A'', A''', . . . mehrere in derselben Ebene lie-

gende Punkte, OX eine in dieser Ebene liegende Gerade und y', y'', y''', . . . die recht- oder schiefwinkligen Ordinaten von A', A'', A''', . . . in Bezug auf OX sind; so nennt man den Mittelpunkt der den Größen $\frac{1}{y'}$, $\frac{1}{y''}$, $\frac{1}{y'''}$, . . . proportionalen Abstände oder Entfernungen den Mittelpunkt der harmonischen Mittel (G) der Punkte A', A'', A''', . . . in Bezug auf OX. Man soll nun beweisen: daß, wenn man von irgend einem Punkte M von OX die Geraden MA', MA'', MA''', . . . MX, MG zieht, das so erhaltene Strahlenbüschel dieselben Eigenschaften hat, wie das in §. 30.

Uebungsaufgaben.

1) Den Ort der Punkte der Ebene zu finden, von welchen aus eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel erscheint.

2) Man soll den Ort des Punktes M finden, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten A, B in einem gegebenen Verhältnisse m : n stehen.

3) Es sind OX, OY (Fig. 48b) zwei auf einander senkrechte Gerade, und OACB ist ein veränderliches Rechteck von einem gegebenen Umfange 2a; man soll zeigen: daß das aus der Ecke C auf die Diagonale AB gefällte Perpendikel CP stets durch den festen Punkt $y = a$, $x = a$ geht.

4) Man soll den Ort der Mittelpunkte der Kreise finden, welche von zwei gegebenen Punkten aus unter gegebenen Winkeln erscheinen.

5) Den Ort der Mittelpunkte der Kreise zu finden, welche zwei gegebene Kreise in diametral gegenüberliegenden Punkten schneiden.

6) Man soll den Ort der Punkte finden, welche so beschaffen sind, daß die Summe der Abstände eines jeden von zwei, oder mehrern Geraden eine constante Größe sei.

7) Es ist ein Kreis (Fig. 48a) und eine Sehne AB in demselben gegeben, durch deren einen Endpunkt B eine Sekante gezogen wird, worauf man CM = CA nimmt; man soll den geometrischen Ort des Punktes M finden.

8) Welchen Ort beschreibt die Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreieckes, wenn die Endpunkte der Hypotenuse sich auf zwei rechtwinkligen Aren bewegen?

9) Welches ist der Ort der Punkte von der Beschaffenheit: daß

die Entfernung eines jeden von der Baſis eines gleichſchenkligen Dreieckes die mittlere Proportionale zwiſchen ſeinen Entfernungen von den Schenkeln des Dreieckes iſt?

10) Den geometriſchen Ort der Punkte von ſolcher Beſchaffenheit zu finden, daß zwei Abſchnitte derſelben Geraden von jedem dieſer Punkte aus unter gleichen Winkeln erſcheinen.

11) Den Ort der Punkte von ſolcher Beſchaffenheit zu finden, daß zwei gegebene Kreiſe von jedem dieſer Punkte aus unter gleichen Winkeln erſcheinen.

12) Durch einen Punkt A (Fig. 48c) eines Kreiſes zieht man eine Sekante und nimmt darauf eine Länge AM von ſolcher Beſchaffenheit, daß $AM \cdot AB = k^2$ iſt; man ſoll den Ort des Punktes M finden.

13) Wenn man durch einen Punkt A (Fig. 48c) eines Kreiſes eine Sekante zieht, und darauf eine ſolche Länge AM nimmt, daß ſich verhält $AB : BM = p : q$, den Ort des Punktes M zu finden.

14) Den Ort der Punkte M von ſolcher Beſchaffenheit zu finden, daß, wenn man jeden derſelben mit den Endpunkten zweier gegebener Geraden AB, CD verbindet, die Dreiecke MAB, MCD ſich wie zwei gegebene Längen verhalten.

15) Welches iſt der Ort der Spitze der Dreiecke, die die Grundlinie und die Mediane einer der beiden andern Seiten gemeinſchaftlich haben?

16) In einem Kreiſe von dem Durchmeſſer AB (Fig. 48d) wird eine Sekante BCD gezogen und CD = BC genommen, dann der Punkt D mit dem Mittelpunkte O, und der Punkt C mit A verbunden; man ſoll den Ort des Durchſchnittspunktes M der beiden Geraden AC, OD finden.

17) Von einem beliebigen Punkte A (Fig. 48e) der Verlängerung des Durchmeſſers eines Kreiſes wird die Tangente AC, ſo wie die Halbirungslinie des Winkels CAO gezogen; man ſoll den Ort des Punktes M finden, wo das aus dem Mittelpunkte O auf die Halbirende AM gefällte Perpendikel dieſe trifft.

18) Durch einen Punkt O (Fig. 48f) der Hypotenuſe BC eines rechtwinkligen Dreieckes ABC zieht man eine beliebige Sekante DE und beſchreibt die beiden Kreiſe OBE, OCD; man ſoll den Ort des Durchſchnittpunktes M dieſer beiden Kreiſe finden.

19) Von einem Punkte A (Fig. 48g) zieht man zwei beliebige Gerade AB, AM unter einem gegebenen Winkel, verlängert

die erste Gerade so weit, bis sie eine gegebene Gerade CD schneidet und nimmt endlich auf der zweiten einen Punkt M von solcher Beschaffenheit, daß sich verhält:

$$AM : AB = p : q;$$

man soll den Ort des Punktes M bestimmen.

20) Den Ort des Punktes M zu finden, wenn in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Geraden CD ein Kreis tritt.

21) Wenn von einem gegebenen Punkte Sekanten an einen gegebenen Kreis gezogen werden, den Ort der Mitten der in dem Kreise liegenden Sehnen zu finden.

22) Man soll den Ort der Punkte von solcher Beschaffenheit finden, daß die Fußpunkte der von jedem auf die Seiten eines Dreieckes gefällten Perpendikel in gerader Linie liegen.

23) Wenn in einem gegebenen Kreise (Fig. 48h) auf dem Halbmesser OC ein Stück OM = dem Perpendikel CD genommen wird, den Ort des Punktes M zu finden. Ebenso den Ort des Punktes M zu finden, wenn OM = OD genommen wird.

24) Wenn zur Construktion eines Viereckes ABCD nur die drei Seiten AB, BC, CD und die Diagonale AC gegeben sind, so daß das Viereck unbestimmt ist, zu finden: 1) den Ort der vierten Winkelspitze D, 2) den der Mitte der Diagonale BD, und 3) den Ort der Mitte der Geraden, welche die Mitten der beiden Diagonalen verbindet.

Viertes Kapitel.

Construction verschiedener Gleichungen.

§. 41.

Construction der binomischen Gleichung.

Die binomische Gleichung bietet zwei Hauptformen dar, nämlich:

$$y^n = x^m, \quad x^m y^n = 1,$$

und bei jeder dieser Formen sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich wenn die Exponenten m, n beide ungerade Zahlen sind, oder wenn der eine eine gerade und der andere eine ungerade Zahl ist. Beide Exponenten können nicht gerade sein,

weil ſich ſonſt die Gleichung in zwei Gleichungen niedrigerer Grade zerlegen ließe.

1) bei der erſten Form:

$$y^{2q+1} = x^{2p+1} \text{ oder } y = \sqrt[2q+1]{x^{2p+1}}$$

entſpricht jedem reellen Werthe von x ein reeller Werth von y von demſelben Zeichen. Für $x = o$ iſt auch $y = o$, und wenn man x ſtetig von $x = o$ bis $x = +\infty$ zunehmen läßt; ſo wächſt auch y ſtetig von o bis $+\infty$, wodurch man den in dem Winkel YAX (Fig. 49) liegenden unendlichen Curvenzweig OA erhält. Wenn ſich x ſtetig von o bis $-\infty$ ändert, ſo ändert ſich y ſtetig von o bis $-\infty$, wodurch man den in dem Winkel Y_1OX_1 liegenden Curvenzweig OA_1 erhält. Die Punkte M, M_1 deren Abſciſſen gleich und entgegengeſetzt ſind, haben auch gleiche und entgegengeſetzte Ordinaten; die Dreiecke MOP, M_1OP_1 ſind einander gleich, MOM_1 iſt eine gerade Linie und $MO = M_1O$. Jede durch den Anfangspunkt gezogene und zu beiden Seiten deſſelben von der Curve begrenzte Gerade wird alſo in dieſem Punkte in zwei gleiche Theile getheilt, und folglich iſt der Anfangspunkt der Coordinaten ein Mittelpunkt der Curve, d. h. ein Punkt von ſolcher Beſchaffenheit: daß jede durch denſelben gehende Gerade die Curve in Punkten ſchneidet, welche paarweiſe auf beiden Seiten deſſelben liegen und gleichweit von demſelben entfernt ſind.

2) Bei der zweiten Form:

$$y^{2q} = x^{2p+1} \text{ oder } y = \pm \sqrt[2q]{x^{2p+1}}$$

gibt jeder poſitive Werth von x zwei gleiche und entgegengeſetzte Werthe für y, während negativen Werthen von x imaginäre Werthe von y entſprechen. Die Curve beſteht alſo aus den beiden Zweigen OA, OA_1 (Fig. 50), welche über und unter der Axe der x eine ſymmetriſche Lage haben; ſie hat keinen Punkt zur Linken der Axe YY_1, und die Axe OX wird bei rechtwinkligen Coordinaten eine Axe der Curve genannt. Denn unter Axe einer Curve verſteht man überhaupt jede Gerade, welche die Curve in zwei ſymmetriſche Theile theilt, ſo daß die Punkte der Curve paarweiſe auf Perpendikeln auf der Axe und in gleichen Abſtänden von dieſer liegen. Wenn x von o bis $+\infty$ wächſt, ſo wächſt auch y dem abſoluten Werthe nach von o bis $+\infty$; die beiden Curvenzweige erſtrecken ſich alſo auf der Seite der poſitiven x ins Un-

endliche und entfernen ſich von der Axe der x unendlich weit.

3) Wenn:

$$x^{2p+1}\, y^{2q+1} = 1 \text{ oder } y = \frac{1}{\sqrt[2q+1]{x^{2p+1}}}$$

iſt, ſo entſpricht jedem reellen Werthe von x ein reeller Werth von y mit demſelben Zeichen, und wenn x von o bis $+\infty$ zunimmt, ſo nimmt y von $+\infty$ bis o ab, ſo daß der erſte Curvenzweig BCA (Fig. 51) in dem Winkel YOX liegt. Wenn x von o bis $-\infty$ abnimmt, ſo nimmt y von $-\infty$ bis o zu, und der zweite Curvenzweig $B_1C_1A_1$ liegt in dem Winkel Y_1OX_1. Der Anfangspunkt O der Coordinaten iſt ein Mittelpunkt der Curve. Die Curvenzweige CA, CB nähern ſich den Axen OX, OY unendlich; denn je größer x wird, deſto kleiner wird y und kann mit zunehmendem x kleiner werden, als jede gegebene, oder angebbare, noch ſo kleine Größe — und wenn y unendlich wächſt, ſo nimmt x unendlich ab. Man nennt aber jede Gerade, welcher ſich ein Curvenzweig unendlich oder unbeſchränkt nähert, eine Aſymptote deſſelben; folglich ſind OX, OY reſp. die Aſymptoten von CA, CB — und ebenſo ſind OX_1, OY_1 Aſymptoten der unendlichen Curvenzweige C,A_1, C,B_1.

4) Wenn:

$$y^{2q}\, x^{2p+1} = 1 \text{ oder } y = \frac{\pm 1}{\sqrt[2q]{x^{2p+1}}}$$

iſt, ſo liegt die Curve ganz auf der rechten Seite der Axe Y_1Y (Fig. 52), die Axe der x iſt eine Axe der Curve, und Y_1Y,OX ſind Aſymptoten von BCA, $B_1C_1A_1$.

§. 42.

Conſtruction der Gleichung der Conchoide:

$$y = \pm \frac{c+x}{x}\sqrt{a^2-x^2}. \qquad (\alpha)$$

Offenbar iſt y nur für die zwiſchen $-a$ und $+a$ liegenden Werthe von x reell, ſo daß, wenn man durch die in der Entfernung a vom Anfangspunkte O liegenden Punkte A, D (Fig. 53) Parallelen zur Axe der y zieht, die Curve ganz zwiſchen dieſen Paral-

lelen liegt. Da ferner jeder zwiſchen — a und + a liegende Werth von x zwei gleiche und entgegengeſetzte Werthe von y gibt, ſo folgt: daß die Curve aus zwei in Beziehung auf die Axe der x ſymmetriſchen Theilen beſteht, ſo daß man nur einen derſelben, etwa den dem Zeichen + entſprechenden, zu conſtruiren braucht. Wenn x von o bis + a zunimmt, ſo nimmt y von + ∞ bis o ab, und folglich iſt die Axe der y eine Aſymptote des Curvenzweiges BAB_1. Hinſichtlich des zur Linken der Axe der y liegenden Curvenzweiges ſind mehrere Fälle zu unterſcheiden:

1) Es iſt a < c. Wenn in dieſem Falle x von o bis — a abnimmt, ſo nimmt y von ∞ bis o ab und man erhält den Curvenzweig EDE_1 (Fig. 53). Für x = — c iſt y = o, welches den iſolirten Punkt C gibt, der als mit in der Gleichung (α) enthalten angeſehen werden muß.

2) Wenn a = c iſt, ſo fällt C mit D zuſammen, und es gibt keinen iſolirten Punkt mehr (Fig. 54).

3) Wenn a > c iſt, und x ändert ſich von o bis — c, ſo nimmt y von + ∞ bis o ab, wodurch man den Curvenzweig EC (Fig. 55) erhält. Wenn x von — c bis — a abnimmt, ſo geht y von o aus und wird wieder o, ohne in dem Intervalle unendlich zu werden, welches den Bogen CD gibt.

§. 43.

Conſtruction der Gleichung.

$$(y^2 + x^2)^2 + 2c^2 (y^2 - x^2) = a^4 - c^4. \quad (\mu)$$

Da ſie nur Glieder mit geraden Potenzen von y enthält, ſo gibt jeder Werth von x zwei gleiche und entgegengeſetzte Werthe von y; und folglich iſt X_1X eine Axe der Curve. Aus demſelben Grunde iſt Y_1Y eine Axe der Curve. Die Curve beſteht alſo aus vier gleichen Theilen, welche in den vier Coordinatenwinkeln liegen, ſo daß je zwei Punkte derſelben auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden und in gleicher Entfernung von dieſem Punkte liegen. Der Anfangspunkt iſt folglich ein Mittelpunkt der Curve.

Aus der Gleichung (μ) folgt zunächſt:

$$y^2 = -(c^2+x^2) \pm \sqrt{a^4 + 4c^2x^2},$$

und hieraus, wenn man nur das poſitive Zeichen der Wurzel-

größe nimmt, weil das negative blos imaginäre Werthe für y gibt:

$$y = \pm\sqrt{\sqrt{a^4+4c^2x^2}-(c^2+x^2)} = \pm\sqrt{\frac{(a^2+c^2-x^2)(a^2-c^2+x^2)}{a^2+x^2+\sqrt{a^4+4c^2x^2}}}.$$

Da der Nenner dieses Ausdruckes für y nothwendig positiv ist, so kann man davon abstrahiren, und da die beiden Factoren des Zählers nicht zugleich negativ sein können; so müssen sie beide positiv sein. Es ist folglich:

$$1)\quad x^2 < a^2 + c^2,\quad d^2 = a^2 + c^2,$$
$$\qquad\quad < d^2$$
$$2)\quad x^2 > c^2 - a^2,\quad e^2 = c^2 - a^2,$$
$$\qquad\quad > e^2.$$

Nimmt man $OA = OA_1 = d$ (Fig. 56, 57 . . . .), so liegt die Curve zwischen den durch die Punkte A, A_1 zu der Axe der y gezogenen Parallelen. Hinsichtlich der zweiten Bedingung müssen mehrere Fälle unterschieden werden.

1) Es ist $a > c$. In diesem Falle wird die zweite Bedingung immer erfüllt. Es ändert sich also x von $-d$ bis $+d$. Wenn x von o bis $+d$ wächst, so ändert sich y von $OB = \sqrt{a^2-c^2}$ bis o, und man hat eine geschlossene Curve (Fig. 56 und 57).

2) Es ist $a = c$. In diesem Falle vereinigen sich die beiden Punkte B, B_1 in O, und man hat die Curve in Fig. 58, welche eine Lemniscate ist.

3) Es ist $a < c$. In diesem Falle ändert sich x von $+e$ bis $+d$ und von $-e$ bis $-d$; und wenn man $OC = OC_1 = e$ nimmt; so erhält man zwei geschlossene Curven (Fig. 59).

§. 44.

Construction der Gleichung:

$$y = x \pm \frac{2}{x^2}\sqrt{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}.$$

Wenn man zunächst die Gerade DD_1 (Fig. 60) construirt, deren Gleichung $y = x$ ist, so erhält man die irgend einer Abscisse OP entsprechenden beiden Punkte M, M_1 der Curve, wenn man auf der Parallele zur Axe der y von dem Punkte I aus zwei Längen:

$$IM = IM_1 = \frac{2}{x_2}\sqrt{x^3+2x^2-5x-6}$$
$$= \frac{2}{x^2}\sqrt{(x+1)(x+3)(x-2)}$$

nimmt. Die Gerade DD_1, welche die zur Axe der y parallelen Sehnen in zwei gleiche Theile theilt, heißt ein Durchmesser der Curve.

§. 45.

Construction der Gleichung:

$$y = \pm \sqrt{\frac{x(x-a)(x-b)}{x+a}}, \quad a>0, \quad b > 0.$$

Die Ordinate y ist von $x = -a$ bis $x = -\infty$ reell; für $x = -a = OA_1$ ist $y = \infty$, und wenn x sich von $-a$ bis $-\infty$ (Fig. 61) ändert; so nimmt y von $+\infty$ bis zu einem gewissen Werthe ab, und wächst dann wieder gegen $+\infty$, wodurch man den Curvenzweig EFG erhält. Die Axe der x ist eine Axe der Curve.

Wenn $b > a$ ist, so ist y von $x = 0$ bis $x = a$ reell, und man erhält die geschlossene Curve OA.

Von $x = a$ bis $x = b$ ist y imaginär, und wenn endlich x von b bis $+\infty$ wächst, so wächst y von 0 bis $+\infty$, wodurch man den unendlichen Curvenzweig BCD (Fig. 61, 62 u. 63) erhält.

Wenn $b < a$ ist, so hat man Fig. 63 wieder.

Wenn $b = a$ ist, so fallen die Punkte A, B zusammen (Fig. 64).

§. 46.

Die gegebene Gleichung, und folglich ihre Construction, wird oft durch eine Coordinatenverwandlung vereinfacht. Es sei z. B. die Gleichung:

$$(4x + 3y - 3)^2 - 25(x + 7y - 7) = 0$$

oder:

$$(4x + 3(y-1))^2 - 25(x + 7(y-1)) = 0.$$

in Bezug auf rechtwinklige Axen OX, OY zu construiren, so erhellet auf der Stelle: daß sich diese Gleichung auf:

$$(4x + 3y_1)^2 - 25(x + 7y_1) = 0$$

reducirt, wenn man den Anfangspunkt auf der Axe der y um die Länge $OO' = 1$ verrückt, indem die Axen ihre frühere Richtung beibehalten.

Nimmt man nun an, daß sich die neuen Axen um einen beliebigen Winkel α drehen, so daß O'X' und OX den Winkel α mit einander bilden, und man substituirt die entsprechenden Transformationsformeln in die letzte Gleichung; so geht sie über in:

$$[(4\cos\alpha + 3\sin\alpha)x' + (3\cos\alpha - 4\sin\alpha)y']^2$$
$$- 25[(\cos\alpha + 7\sin\alpha)x' + (7\cos\alpha - \sin\alpha)y'] = 0.$$

Nun kann man den Winkel α so annehmen: daß der Coefficient von x', oder von y' in der ersten Klammer verschwindet, so daß die Gleichung in Bezug auf x' oder y' vom ersten Grade wird. Läßt man z. B. den Coefficienten von y' verschwinden, und setzt zu dem Ende:

$$3\cos\alpha - 4\sin\alpha = 0 \text{ oder } \operatorname{tang}\alpha = \frac{3}{4};$$

so nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$y' = x'^3 - x' = x'(x'^2 - 1),$$

welche sich leicht construiren läßt.

§. 47.

Wenn man die Gleichung:

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

welche das Descartes'sche Folium ausdrückt, ähnlich behandelt, indem man die Axen um einen Winkel von 45° drehet; so geht sie in folgende über:

$$3(x' + a')y'^2 + (x' - 3a')x'^2 = 0, \text{ wo } a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

folglich:

$$y' = \mp x'\sqrt{\frac{3a' - x'}{3(x' + a')}},$$

und die entsprechende Curve ist Fig. 65.

§. 48.

Reduction der allgemeinen Gleichung einer Curvengattung.

Es sei:

$$F(x, y, A, B, \ldots H) = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung einer Curvengattung, wo $A, B, \ldots H$ willkürliche Parameter von der Zahl n bedeuten und die Axen als rechtwinklig vorausgesetzt sind; so kann man, statt diese allgemeine Gleichung zu construiren, sie zuerst vereinfachen, indem man sie auf bewegliche Axen OX', OY' (Fig. 27) bezieht. Werden diese beweglichen Axen ebenfalls als rechtwinklig angenommen, sind p, q die Coordinaten des Anfangspunktes O' und ist α der Winkel, welchen OX' mit OX bildet; so wird die Gleichung (1):

$$f(x', y', A, B, \ldots H, p, q, \alpha) = 0. \qquad (2)$$

Nun lassen sich aber im Allgemeinen zwischen den n Parametern A, B, . . . H und den n andern Parametern a, b, . . . e, p, q, α immer n Relationen aufstellen, so daß die Gleichung (2) nur noch die n — 3 willkürlichen Parameter a, b, . . . e enthält. Wenn z. B. die Gleichung n Coefficienten enthält, welche Functionen der willkürlichen Parameter sind, so macht man drei derselben verschwinden und setzt die n — 3 übrigen gleich a, b, . . . e, so daß die Gleichung (2) in folgende übergeht:

$$\varphi(x', y', a, b, \ldots e) = 0, \qquad (3)$$

welche nur n — 3 willkürliche Parameter enthält.

Die n ursprünglichen Parameter A, B, . . . H sind also durch die n Parameter a, b, . . . e, p, q, α ersetzt, wovon die 3 letzten p, q, α, welche sich auf die Beweglichkeit der Axen O'X', O'Y' beziehen, nicht explicite in der Gleichung (3) vorkommen. Wenn die Axen O'X', O'Y' fest liegen, aber a, b, . . . e sich ändern, so gibt die Gleichung (3) alle Curven der Gattung nur in besondern Lagen, weil die damit verbundene Aenderung von p, q, α nur eine Veränderung der Curven in ihrer Ebene, aber keine Formveränderung derselben bewirkt.

Man kann sogar die Anzahl der in der Gleichung (1) explicite vorkommenden willkürlichen Parameter um 4 vermindern. Denn wenn die beweglichen Axen nicht wie vorhin einen constanten, sondern einen veränderlichen Winkel ϑ mit einander bilden, und man in die Gleichung (1) für x, y die Werthe (§. 12):

$$x = p + x' \cos\alpha + y \cos(\vartheta + \alpha),$$
$$y = q + x' \sin\alpha + y' \sin(\vartheta + \alpha)$$

setzt, und endlich die vier Größen p, q, α, ϑ so bestimmt, daß 4 Coefficienten verschwinden; so erhält man, wenn man die n — 4 andern Coefficienten gleich a, b, . . . d setzt, eine Gleichung:

$$\psi(x', y', a, b, \ldots \alpha) = 0, \qquad (4)$$

welche nur n — 4 willkürliche Parameter enthält. Diese Gleichung (4) drückt in Bezug auf dasselbe Axensystem nicht alle Curven der Gattung aus, wie die Gleichung (3). Gibt man dem Winkel ϑ einen gewissen Werth, construirt die in der Gleichung (4) enthaltenen Curven und läßt dann ϑ sich ändern; so wird die Form der Curven geändert.'

Später werden wir diese Reductionsmethode auf die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen anwenden. Die erste Reduction läßt sich auf mehrere Arten bewerkstelligen, und

die allgemeine Gleichung des zweiten Grades wird entweder auf die Form:

$$y^2 + ax^2 + bx = 0,$$

oder auf eine der drei Formen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px$$

zurückgeführt. Die zweite Reduction gibt für die Ellipse:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

und für die Hyperbel:

$$xy = a^2.$$

§. 49.

Zuweilen läßt sich die Gleichung der Curve nach keiner der beiden Veränderlichen auflösen, und man muß zu diesem Zwecke eine Hülfsveränderliche anwenden. Ist z. B. die Gleichung gegeben:

$$x^4y^4 + (x^2 - 4)(y - x)^4 = 0, \qquad (1)$$

und man setzt:

$$xy = t(y - x),$$

so ergibt sich:

$$x = \pm\sqrt{4 - t^4}, \qquad (2)$$

und:

$$y = \frac{tx}{t - x} = \frac{\pm t\sqrt{4 - t^4}}{t \mp \sqrt{4 - t^4}}. \qquad (3)$$

Die Gleichung (1) kann nun durch die beiden Gleichungen (2) und (3) ersetzt werden, worin t als unabhängige Veränderliche zu betrachten ist. Nur für die zwischen $-\sqrt{2}$ und $+\sqrt{2}$ liegenden Werthe von t sind x und y reell, und x ändert sich von -2 bis $+2$. Nimmt man folglich $OA = OA_1 = 2$ (Fig. 66), so liegt die Curve ganz zwischen den durch die Punkte A und A_1 zu der Axe der y gezogenen Parallelen. Wenn man zunächst das Zeichen $+$ nimmt, so hat man:

$$x = \sqrt{4 - t^4},$$

$$y = \frac{tx}{t - x} = \frac{t\sqrt{4 - t^4}}{t - \sqrt{4 - t^4}} = \frac{t\sqrt{4 - t^4}\,(t + \sqrt{4 - t^4})}{t^4 + t^2 - 4},$$

und wenn man die Wurzeln der Gleichung $t^4 + t^2 - 4 = 0$ mit t'^2, t''^2 bezeichnet; so ist:

$$y = \frac{t\sqrt{4-t^4}\,(t+\sqrt{4-t^4})}{(t^2+t'^2)(t^2-t'^2)}, \qquad (4)$$

$$t'^2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}, \; t' = \pm 1{,}25.$$

Wenn sich t von $-\sqrt{2}$ bis o ändert, so wächst x von o bis $+2$, die Ordinate $y = \frac{tx}{t-x}$ ist in diesem Intervalle positiv, wächst von o bis zu einem gewissen Werthe und nimmt dann wieder bis zu o ab, wodurch man den Curvenzweig OBA erhält.

Wenn sich t von o bis $+\sqrt{2}$ ändert, so nimmt x von $+2$ bis o ab, die Ordinate (4) ist in dem Intervalle von $t = o$ bis $t = t'$ negativ und ändert sich von o bis $-\infty$, so daß man den unendlichen Curvenzweig AC erhält. Von $t = t'$ bis $t = +\sqrt{2}$ ist die Ordinate positiv und ändert sich von $+\infty$ bis o, so daß man den unendlichen Curvenzweig DO erhält. Dem Zeichen — entspricht der zur Linken der Axe der y liegende Theil der Curve, welchen man sofort erhält, wenn man bemerkt: daß der Anfangspunkt ein Mittelpunkt der Curve ist.

§. 50.

Construction von Curven, deren Gleichungen in Polarcoordinaten gegeben sind.

Epicycloide (§. 9):

$$\varrho = 2a(1 - \cos\vartheta) = 4a\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Wenn ϑ von o bis π wächst, so nimmt ϱ stetig von o bis 4a zu, so daß man den Curvenzweig OMB (Fig. 13) erhält, und wenn sich ϑ von o bis $-\pi$ ändert, so durchläuft ϱ dieselben Werthe wieder wie zuvor, so daß man einen zweiten Curvenzweig OM_1B erhält, welcher gegen die Polaraxe eine symmetrische Lage hat. Es ist überflüssig ϑ größere Werthe als π zu geben, da dieselben Werthe von ϱ periodisch wiederkehren.

Construction der Curve $\varrho = f(\mu\vartheta)$, wo $f(\mu\vartheta)$ irgend eine Function trigonometrischer Linien des Bogens $\mu\vartheta$ bedeutet. Wenn ϑ sich von o bis $\frac{2\pi}{\mu}$ ändert, so ändert sich $\mu\vartheta$ von o bis 2π, und wenn ϑ sich von $\frac{2\pi}{\mu}$ bis $\frac{4\pi}{\mu}$ ändert, so ändert sich $\mu\vartheta$ von 2π bis 4π, und ϱ nimmt wieder dieselben Werthe und in derselben Ord-

nung wie zuvor an, so daß man einen zweiten dem ersten gleichen Curvenzweig erhält, u. s. f. Die Curve besteht also aus einer Reihe gleicher Undulationen, wovon jede einen Winkel $\frac{2\pi}{\mu}$ umfaßt.

Wenn μ eine ganze Zahl m ist und man theilt den Kreisumfang in m gleiche Theile, so umfaßt jede Undulation den Winkel $\frac{2\pi}{\mu}$ und die $(m+1)^{te}$ Undulation fällt mit der ersten zusammen, u. s. f.

Wenn μ ein nicht reducirbarer Bruch $\frac{m}{n}$ ist, und der Kreisumfang wird wieder in m gleiche Theile getheilt; so umfaßt jede Undulation n solcher Theile. Nimmt man immer den nten Theilungspunkt nach der Reihe, so werden nach n Umläufen alle Theilungspunkte durchlaufen und nach m Undulationen kommt man wieder auf den Ausgangspunkt.

Allgemein: k Undulationen umfassen einen Winkel oder Bogen $= \frac{2k\pi}{\mu} = \frac{k}{\mu} \cdot 2\pi$. Wenn also μ incommensurabel ist, so kann $\frac{k}{\mu}$ keine ganze Zahl sein, man kommt niemals auf den Ausgangspunkt zurück, und die Undulationen folgen in unendlicher Anzahl auf einander. Es sei z. B.:

$$\varrho = a + \cos\frac{5\vartheta}{n},$$

wo n und 5 prim unter sich sind.

1) Ist $a > 1$, so liegt ϱ zwischen $a+1$ und $a-1$, und wenn man mit den Halbmessern $Oa = a-1$, $OA = a+1$ (Fig. 67) um den Pol O zwei Kreise beschreibt; so liegt die Curve zwischen diesen Kreisen. Die volle Curve entspricht $n=1$ und die punktirte entspricht $n=2$.

2) Wenn $a = 1$ ist, so variirt ϱ zwischen o und 2, und der innere Kreis reducirt sich auf den Pol O (Fig. 68).

3) Ist $a < 1$ und $n = 1$, so verschwindet ϱ für einen Werth α von ϑ, der kleiner als $\frac{\pi}{5}$ ist, so daß man von $\vartheta = o$ bis $\vartheta = \alpha$ den Curvenzweig ABO (Fig. 69) erhält. Von $\vartheta = \alpha$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{5}$ ändert sich ϱ von o bis $-(1-a)$ und man erhält den kleinen Zweig oba. Von $\vartheta = \frac{\pi}{5}$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{5} + \alpha$ variirt ϱ von $1-a$ bis o, welches den Zweig oca gibt. — Endlich von

$\vartheta = \frac{\pi}{5} + \alpha$ bis $\vartheta = \frac{2\pi}{5}$ ändert ſich ϱ von o bis $1 + a$, welches den Zweig OC'A' gibt. Die Undulation iſt alſo hier AB bac OCA'.

§. 51.

Conſtruction transcendenter Curven.

1) Es ſei $y = \sin x$, ſo erhält man, wenn x ſich von o bis 2π ändert, eine aus zwei gleichen Theilen OAI, IBO' (Fig. 70) beſtehende erſte Undulation OAIBO', welche ſich von 2π bis 4π, von 4π bis 6π ... wiederholt.

2) Es ſei $y = \text{tang } x$, ſo erhält man, wenn x ſich von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ ändert, einen erſten Zweig AOB (Fig. 71), welcher ſich von $x = \frac{\pi}{2}$ bis $x = \frac{3\pi}{2}$, ... wiederholt, ſo daß die Curve aus unendlich vielen gleichen Zweigen beſteht, wovon jeder ein Intervall $= \pi$ umfaßt.

3) Es ſei $\cos y = m - \cos x$, wo m poſitiv iſt und zwiſchen 1 und 2 liegt. Da $\cos y < 1$ ſein muß, ſo muß $\cos x > m - 1$ ſein. Es ſei α der kleinſte Bogen oder Winkel, deſſen Coſinus $= m - 1$ iſt. Wenn x ſich von $-\alpha$ bis o und von o bis $+\alpha$ ändert, ſo ändert ſich y von o bis α und von α bis o, oder von o bis $-\alpha$ und von $-\alpha$ bis o, ſo daß man um den Anfangspunkt eine geſchloſſene Curve erhält. Setzt man ferner $2k\pi + x'$, $2k'\pi + y'$ reſp. für x, y, d. h. verlegt man den Anfangspunkt in einen Punkt O', deſſen Coordinaten $2k\pi$, $2k'\pi$ ſind; ſo wird die gegebene Gleichung nicht geändert, und man erhält um den Punkt O' dieſelbe geſchloſſene Curve, wie um O. Zieht man alſo in dem gegenſeitigen Abſtande 2π Parallelen zu den Aren der x und der y, ſo kann man jeden Durchſchnittspunkt derſelben zu dem neuen Anfangspunkte O' nehmen, und man erhält um jeden dieſelbe geſchloſſene Curve (Fig. 72). Wenn $m = 2$ iſt, ſo reduciren ſich dieſe Curven auf Punkte.

4) Es ſei $\sin y = m \sin x$, wo m poſitiv und < 1 iſt. Iſt α der kleinſte Winkel oder Bogen, deſſen Sinus $= m$ iſt, und x ändert ſich von o bis $\frac{\pi}{2}$, von $\frac{\pi}{2}$ bis π, von π bis $\frac{3\pi}{2}$, von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π; ſo ändert ſich y einerſeits von o bis α, von α bis o, von

o bis $-\alpha$, von $-\alpha$ bis o, und andererſeits von π bis $\pi-\alpha$, von $\pi-\alpha$ bis π, von π bis $\pi+\alpha$, von $\pi+\alpha$ bis α, ſo daß man die beiden Undulationen OAIBO', CDEFC' (Fig. 73) erhält, welche ſich längs der Axe der x unaufhörlich wiederholen. — Wenn man zu y die Größe $2k\pi$ addirt, ſo wird die Gleichung nicht geändert, und die beiden Curven OO', CC' wiederholen ſich folglich unaufhörlich über und unter XX_1.

§. 52.

Das bisher zur Unterſuchung einer Curve angewandte Verfahren beſtand darin: daß man eine der beiden Coordinaten, z. B. die Abſciſſe x, als urſprüngliche oder unabhängige Veränderliche und die andere, die Ordinate y, als eine durch die gegebene Gleichung der Curve beſtimmte Function der Abſciſſe x betrachtet, und unterſucht, für welche Werthe von x die Ordinate y reell iſt, wodurch man die Anzahl und Grenzen der Curvenzweige erhält. Unterſucht man alsdann die Veränderungen der Ordinate y zwiſchen den gefundenen Grenzen, ſo bekommt man eine erſte, noch ſehr unvollkommene Skizze der Curve; denn die genaue Form der Curve, ihre Richtung und Krümmung in jedem Punkte, ꝛc. ꝛc. bleiben noch zu beſtimmen, womit wir uns in den nächſten Kapiteln beſchäftigen wollen.

§. 53.

Uebungsaufgaben.

Man ſoll folgende Curven conſtruiren:

1) die Ciſſoide: $y^2(2r-x)-x^3=0$, (Fig. 14),

2) Pascals Schneckenlinie: $\varrho = 2r\cos\vartheta \pm a$, (Fig. 12),

3) $x^4 - r^2(x^2+y^2) = 0$ oder $\varrho = \frac{r}{\cos^2\vartheta}$, (Fig. 11),

4) $(x^2+y^2)^3 - l^2x^2y^2 = 0$ oder $\varrho = \frac{l}{2}\sin 2\vartheta$,

5) $(x+y)[x^2+y^2+a(x+y)] - axy = 0$. Die Axen um 45° gedrehet.

6) $y = x \pm \sqrt{1+\frac{1}{x}}$,

7) $y = x \pm \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}$,

8) $y^2 = x - x^3$,

9) $y^2 = x^3 - x^4$,

10) $y^2 = \frac{x^3 + x^2}{x^3 - 4}$,

11) $y^2 = \frac{x^3 - a^3}{x + b}$, (Fig. 74),

12) $y^3 = \frac{x^4 - a^2x^3}{2x - a}$, (Fig. 75),

13) $\varrho = a \cos \vartheta + b$, $b > a$, (Fig. 76),

14) $\varrho = a \sin 3\vartheta$, (Fig. 77),

15) $\varrho = a (\sin 2\vartheta - \sin \vartheta) = a \sin \vartheta \, (2 \cos a - 1)$, (Fig. 78),

16) $\varrho = a^2 \cdot \frac{\sin 3\vartheta}{\cos \vartheta}$, (Fig. 79),

17) $\varrho = a \, (\operatorname{tang} \vartheta - 1)$, (Fig. 66),

18) $\varrho = \frac{a \, \vartheta^2}{\vartheta^2 - 1}$, (Fig. 81),

19) $x^3 - ax^2y + by^3 = o$, (Fig. 82),

20) $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = o$, (Fig. 83),

21) $x^4 - x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = o$, (Fig. 84),

22) $x^5 + bx^4 - a^3y^2 = o$, (Fig. 85),

23) $(by - cx)^2 = (x - a)^5$, (Fig. 86),

24) $x^4 - ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = o$, (Fig. 87),

25) $a^3y^2 - 2abx^2y - x^5 = o$, (Fig. 88),

26) $y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = o$, (Fig. 89),

27) $(y - c)^2 = (x - a)^6 \, (x - b)$, $a > b$, (Fig. 90),

28) $xy^2 + 2a^2y - x^3 = o$, (Fig. 80).

29) $xy = a \, (x + y)$,

30) $\sqrt{y} \pm \sqrt{x} = \sqrt{a}$,

31) $y = \sin x \pm \cos x$,

32) $y = \text{arc. cos} \, (1 - x)$,

33) $y = \text{arc. tang} \, (a + x)$,

34) $y = (\log x)^3$,

35) $y = e^{\cos x}$,

36) $\varrho = a \sec \vartheta - b$,

37) $\varrho = a \, (1 + \cos \vartheta)$,

38) $\varrho = a \cos \vartheta$,

39) $\varrho = a \operatorname{tang} \vartheta$,

40) $\varrho = a \, (\cos \vartheta - \sin \vartheta)$,

41) $\varrho = a \sin 2\vartheta$,

42) $\varrho = a(1 + 2\sin\frac{1}{2}\vartheta)$,
43) $\varrho = a\sec\vartheta$,
44) $\varrho = a\sec\vartheta.\ \mathrm{tang}^2\vartheta$.
45) $x^2y - aby + a^2x = o$, (Fig. 93),
46) $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 4ay^3 - 4ax^2y + 8a^2y^2 - 8a^3y = o$, (Fig. 94),
47) $x^4 - 2ax^3\sqrt{2} + 2a^2x^2 - ay^3 - a^2y^2 = o$, (Fig. 95),
48) $y^4 - 6ay^3 + 14a^2y^2 - 16a^3y - x^4 + 4a^2x^2\sqrt{2} = o$, (Fig. 96),
49) $x^4 - 2a^2x^2 - 4ay^3 + a^4 = o$, (Fig. 97),
50) $y^4 - 4ay^3 - 8a^2y^2 + 4x^4 - 8a^2\sqrt{2}x^2 + 8a^4 = o$, (Fig. 98),
51) $x^4 - 2ax^2y - 2a^2y^2 + ay^3 + y^4 = o$, (Fig. 91),
52) $y^4 - axy^2 + x^4 = o$, (Fig. 92).

Fünftes Kapitel.

Tangenten im Parallelcoordinatensysteme.

§. 54.

Wenn man eine Sekante MM′ (Fig. 99 und 100) einer Curve AB sich um den Punkt M so drehen läßt, daß sich der Punkt M′ dem Punkt M unendlich nähert; so nähert sich diese Sekante einer Grenzlage MT, welche die Tangente der Curve im Punkte M genannt wird.

Es seien x, y die Coordinaten des Punktes M und $x' = x + h$, $y' = y + k$ die des Punktes M′, so ist die Gleichung der Sekante MM′:

$$Y - y = \frac{y' - y}{x' - x}(X - x) = \frac{k}{h}(X - x),$$

wo X, Y die laufenden (veränderlichen) Coordinaten bedeuten. Wenn sich nun der Punkt M′ dem Punkte M unendlich oder unbeschränkt nähert, so nähern sich h und k gleichzeitig unbeschränkt der Grenze Null, und das Verhältniß $\frac{k}{h}$ nähert sich unbeschränkt einer gewissen Grenze I; folglich wird die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der Curve:

$$Y - y = I.(X - x).$$

Tangente im Anfangspunkte. — Geht die Curve durch den Anfangspunkt O (Fig. 101) der Coordinaten und ist M ein

benachbarter Punkt der Curve, deſſen Coordinaten x, y ſind, ſo iſt die Gleichung der Sekante OM:

$$Y = \frac{y}{x} X,$$

und die Gleichung der Tangente OT im Anfangspunkte wird erhalten, wenn man die Grenze von $\frac{y}{x}$ ſucht, indem ſich der Punkt M dem Anfangspunkte O unbeſchränkt nähert.

Beiſpiel 1. Es ſei $y^n = x^m$, ſo iſt $\frac{y}{x} = x^{\frac{m}{n} - 1}$, und und wenn x gegen Null convergirt; ſo convergirt das Verhältniß $\frac{y}{x}$ gegen o, oder gegen ∞, jenachdem $m \gtrless n$ iſt. Im erſten Falle iſt die Axe der x und im zweiten Falle die der y eine Tangente der Curve im Anfangspunkte der Coordinaten.

Beiſpiel 2. Es ſei $y = \sin x$, ſo iſt die Grenze von $\frac{y}{x}$ = Grenze von $\frac{\sin x}{x} = 1$, wofür wir der Kürze wegen immer ſetzen wollen: Gr. $\frac{y}{x}$ = Gr. $\frac{\sin x}{x}$; und folglich halbirt die Tangente OT (Fig. 70) im Anfangspunkte den Winkel der Axen. Da ferner $\frac{\sin x}{x} < 1$ iſt, ſo folgt: daß die Curve OA zwiſchen der Tangente und der Axe der x liegt. Um die Tangente im Punkte I′ zu erhalten, verlegt man den Anfangspunkt nach I, d. h. man ſetzt $\pi + x'$ ſtatt x in die Gleichung der Curve, wodurch man erhält:

$$y = \sin(\pi + x') = -\sin x', \text{ Gr. } \frac{y}{x'} = -1,$$

und folglich iſt die Halbirungslinie IT eine Tangente in I′.

Beiſpiel 3. Es ſei $y = \text{tang } x$, ſo iſt:

$$\text{Gr. } \frac{y}{x} = \text{Gr. } \frac{\text{tang } x}{x} = 1,$$

und folglich iſt die Halbirungslinie OT (Fig. 71) wieder die Tangente der Curve im Anfangspunkte. So lange x zwiſchen o und $\frac{\pi}{2}$ liegt, iſt bekanntlich $\frac{\text{tang } x}{x} > 1$, und folglich liegt der Curvenzweig OA über der Tangente, alſo in dem von der Tangente und der Axe der y gebildeten Winkel.

Beiſpiel 4. Es ſei $\sin y = m \sin x$, ſo iſt:

$$\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{y}{x} = m \frac{\sin x}{x}, \text{ Gr. } \frac{y}{x} = m.$$

Beiſpiel 5. Es ſei:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2a^2 (y^2 - x^2) = 0,$$

oder mit x^2 dividirt:

$$\left(\frac{y}{x} y + x\right)^2 + 2a^2 \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right] = 0.$$

Zunächſt ſieht man, daß $\frac{y}{x} < 1$ iſt, dem abſoluten Werthe nach, und wenn x, y gleichzeitig gegen Null convergiren; ſo verſchwindet das erſte Glied der Gleichung: und man hat:

$$\left(\text{Gr.. } \frac{y}{x}\right)^2 - 1 = 0, \text{ alſo Gr. } \frac{y}{x} = \pm 1.$$

Es gibt alſo zwei Tangenten in O (Fig. 58), nämlich die beiden Halbirungslinien der Coordinatenwinkel; und in der That gehen zwei Curvenzweige durch den Anfangspunkt O. Da ferner dem abſoluten Werthe nach $\frac{y}{x} < 1$ iſt, ſo liegen die beiden Curvenzweige zwiſchen der Tangente und der Axe der x.

§. 55.

Tangente in einem beliebigen Punkte M (Fig. 99 u. 100) der Curve.

Die Gleichung der Curve ſei zunächſt:

$$y = f(x), \qquad (\mu)$$

ſo hat man, da die Punkte M, M' auf der Curve liegen, und mithin ihre Coordinaten x, y; $x' = x + h$, $y' = y + k$ der Gleichung (μ) genügen müſſen:

$$y = f(x), \; y' = f(x') \text{ oder } y + k = f(x + h),$$

folglich:

$$y' - y = f(x') - f(x) \text{ oder } k = f(x + h) - f(x),$$

und es kommt nun darauf an:

$$\text{Gr.} \frac{y' - y}{x' - x} = \text{Gr.} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \text{ oder Gr.} \frac{k}{h} = \text{Gr.} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

zu finden.

Nach dem Anhange iſt aber allgemein:

$$\text{Gr. } \frac{k}{h} = \text{Gr } \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

also die Gleichung der Tangente:

$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

Der Neigungs- oder Richtungscoefficient I der Tangente in irgend einem Punkte der Curve $y = f(x)$ ist also nichts anders, als die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$.

Beispiel. — Es sei $y = f(x) = x^3 - x$, so ist $f'(x) = 3x^2 - 1$; also für den Anfangspunkt $I = -1$, und für die Punkte A, A_1 (*Fig.* 102), wo die Curve die Axe der x schneidet, $I = 2$.

§. 56.

Wenn die Gleichung der Curve von der Form ist:

$$f(x, y) = 0,$$

d. h. unentwickelt; so kommt es wieder darauf an, aus derselben den Werth von Gr. $\frac{k}{h}$ abzuleiten.

Erste Methode. — Nach Anhang, Formel (33) hat man:

$$\text{Gr.}\frac{k}{h} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{f'_x}{f'_y};$$

folglich ist die Gleichung der Tangente:

$$\left.\begin{aligned} Y - y &= -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(X - x) \\ \text{oder:}\quad (X - x) f'_x(x, y) &+ (Y - y) f'_y(x, y) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Zweite Methode. — Die Gleichung der Sekante MM' ist von der Form:

$$Y - y = I_1(X - x), \qquad (1)$$

und die gemeinschaftlichen Auflösungen der simultanen Gleichungen (1) und:

$$f(X, Y) = 0, \qquad (2)$$

geben die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Sekante mit der Curve. Jede aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen entspringende Gleichung gestattet aber dieselben Auflösungen, und wenn man den aus der Gleichung (1) abgeleiteten Werth von Y in (2) setzt; so erhält man die Gleichung mit X:

$$f(X, y + I_1(X - x)) = 0, \qquad (3)$$

deren Wurzeln, worunter sich auch x und x' befinden, die Abscissen der fraglichen Durchschnittspunkte sind, so daß der erste Theil der Gleichung (3) den Factor $(X - x)(X - x')$ enthält. Läßt man nun die Sekante sich um den Punkt M drehen, so ändert sich I_1

so, daß die Wurzel x' gegen x convergirt, und der erste Theil der Gleichung (3) den Factor $(X-x)^2$ enthält; d. h. der der Tangente entsprechende Werth I von I_1 ist so beschaffen, daß die Gleichung (3) die doppelte Wurzel x hat.

Diese Bedingung ist zur Bestimmung von I hinreichend, und wird erhalten, wenn man ausdrückt, daß x die Ableitung des ersten Theiles der Gleichung (3) verschwinden macht. Diese Ableitung ist aber:

$$f'_X(X, Y) + I \cdot f'_Y(X, Y),$$

und da dieselbe für x verschwinden muß; so hat man die Gleichung:

$$f_x(x, y) + I \cdot f'_y(x, y) = 0,$$

woraus folgt:

$$I = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

wie vorhin.

§. 57.

Normale.

Die im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete senkrechte Gerade wird die Normale der Curve genannt. Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, so ist die Gleichung der Normale:

$$Y - y = \frac{f'_y(x, y)}{f'_x(x, y)}(X - x),$$

oder:

$$\frac{X - x}{f'_x(x, y)} = \frac{Y - y}{f'_y(x, y)}.$$

Subtangente und Subnormale nennt man ferner die Stücke der Abscissenaxe, welche resp. zwischen den Durchschnittspunkten der Tangente und Normale mit dieser Axe und dem Fußpunkte der Ordinate des Berührungspunktes liegen. Offenbar erhält man den Ausdruck für die Subtangente und Subnormale, wenn man in der Gleichung der Tangente und Normale $Y = 0$ setzt und dann daraus den Werth von $X - x$ sucht. Das Zeichen dieses Werthes gibt von selbst an, auf welcher Seite des Fußpunktes der Ordinate die Subtangente und Subnormale genommen werden muß.

Kennt man die Subtangente oder Subnormale, so kann man sofort leicht die Tangente und Normale construiren.

Unter Länge der Tangente und Normale verſteht man die Stücke dieſer Linien, welche zwiſchen dem Berührungspunkte und ihrem Durchſchnittspunkte mit der Axe der x liegen.

Wenn T die Tangente, N die Normale, S_t die Subtangente und S_n die Subnormale bedeutet; ſo findet man leicht in rechtwinkligen Coordinaten:

$$T = y\sqrt{1+\frac{1}{I^2}} = \frac{y}{I}\sqrt{1+I^2},$$

$$N = y\sqrt{1+I^2},$$

$$S_t = -\frac{y}{I},\ S_n = y\,I.$$

Beiſpiel 1. — Für den auf ſeinen Mittelpunkt und auf rechtwinklige Coordinatenaxen bezogenen Kreis hat man:

$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2-r^2) = o,\ f'_x(x,y) = x,\ f'_y(x,y) = y$;

folglich iſt die Gleichung der Tangente:

$$xX + yY = r^2,$$

und die der Normale:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}.$$

Es gehen mithin alle Normalen des Kreiſes durch den Mittelpunkt deſſelben, oder die Tangente iſt auf dem nach dem Berührungspunkte gehenden Halbmeſſer ſenkrecht.

Beiſpiel 2. Für die auf ihren Mittelpunkt bezogene Ellipſe und Hyperbel:

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$$

findet man leicht:

Gleichung der Tangente:

$$a^2y(Y-y) \pm b^2x(X-x) = o,$$

oder:

$$a^2yY \pm b^2xX = \pm a^2b^2.$$

Gleichung der Normale:

$$b^2x(Y-y) \mp a^2y(X-x) = o.$$

Ferner:

$$T = \frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2},$$

$$N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2},$$

$$S_t = \frac{a^2-x^2}{x},\ S_n = \mp\frac{b^2x}{a^2}.$$

Beiſpiel 3. — Parabel: $y^2 = 2px$.

Gleichung der Tangente:

$$(Y - y)\,y - (X - x)\,p = 0,$$

oder:

$$yY = p(X + x).$$

Gleichung der Normale:

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

Ferner:

$$T = \sqrt{2x(2x + p)},$$
$$N = \sqrt{p(2x + p)},$$
$$S_t = 2x,\ S_n = p.$$

Beiſpiel 4. — Cycloide (S. 13, Fig. 18):

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),\ y = r(1 - \cos\varphi),$$

$$\text{Gr.}\frac{k}{h} = I = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2r - y}{y}}.$$

Gleichung der Tangente:

$$Y - y = \sqrt{\frac{2r - y}{y}}(X - x).$$

Gleichung der Normale:

$$Y - y = -\sqrt{\frac{y}{2r - y}}(X - x).$$

Ferner:

$$T = y\sqrt{\frac{2r}{2r - y}},\quad N = \sqrt{2ry} = NM,$$

$$S_t = y\sqrt{\frac{y}{2r - y}},\quad S_n = \sqrt{2ry - y^2} = PN.$$

Aus dem Werthe von N und S_n erhellet: daß MN eine Normale, und folglich MN′ eine Tangente iſt.

§. 58.

Größte und kleinſte Ordinaten.

Man kann den Zuwachs h der Abſciſſe x immer ſo klein annehmen, daß das Verhältniß $\frac{k}{h}$ beliebig wenig von ſeiner Grenze I verſchieden iſt, und folglich daſſelbe Zeichen hat als dieſe. Wenn alſo h poſitiv geſetzt wird, ſo hat k mit I einerlei Zeichen,

so daß, wenn die Abscisse wächst, die Ordinate zu- oder abnimmt, jenachdem I positiv oder negativ ist.

Von A bis B (Fig. 103) ist I positiv und die Ordinate wächst; von B bis C dagegen ist I negativ und die Ordinate nimmt ab, worauf I wieder positiv wird und die Ordinate bis D zunimmt, dann wieder abnimmt, u. s. f. Im Punkte B geht I vom Positiven zum Negativen, und die Ordinate aus dem Wachsen ins Abnehmen über; sie ist also größer, als die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Ordinaten, d. h. sie ist ein Maximum. Im Punkte C geht I vom Negativen zum Positiven und die Ordinate aus dem Abnehmen ins Zunehmen über, ist also kleiner als die benachbarten Ordinaten, d. h. ein Minimum. — Die Punkte der Curve, für welche I das Zeichen ändert, haben also größte, oder kleinste Ordinaten, jenachdem I vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, übergeht.

Uebrigens sind die Worte „Maximum“ und „Minimum“ nicht in einem absoluten, sondern nur in einem relativen Sinne zu nehmen, und es ist z. B. die kleinste Ordinate des Punktes E größer als die größte Ordinate des Punktes B.

Wenn die Gleichung der Curve von der Form $f(x) = y$ ist, wo $f(x)$ ein ganzes Polynom bedeutet; so ändert sich die Ableitung $I = f'(x)$ mit x stetig und bleibt endlich mit x, und kann folglich ihr Zeichen nur ändern, wenn sie durch Null geht. Die Abscissen der Punkte der Curve, welchen größte, oder kleinste Ordinaten entsprechen, sind also Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, und die Tangenten in diesen Punkten sind zu der Axe der x parallel.

Beispiel. Die Gleichung der Curve sei:

$$f(x) = y = x^3 - x,$$

so ist:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0, \text{ also } x = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Es seien B und B_1 (Fig. 90) die Punkte, deren Abscissen resp. $+\sqrt{\frac{1}{3}}$, $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ sind, so ist I von C_1 bis B_1 und von B bis C positiv; aber von B_1 bis B negativ. In B_1 geht I vom Positiven zum Negativen über, so daß die Ordinate dieses Punktes der Curve ein Maximum ist; in B_1 dagegen geht I vom Negativen zum Positiven über und die Ordinate dieses Punktes ist folglich ein Minimum.

§. 59.

Wenn die Gleichung der Curve in der unentwickelten Form $f(x, y) = o$ gegeben ist, so ist:

$$I = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

und folglich kann I nur sein Zeichen wechseln, wenn der Zähler, oder Nenner seines Ausdruckes das Zeichen ändert. Wenn aber die Curve eine algebraische ist, so sind Zähler und Nenner ganze Polynome von x und y, welche nur ihr Zeichen ändern, indem sie durch Null gehen. Geschieht dieses mit dem Zähler, so geht I durch Null, wie in den Punkten B, C, E (Fig. 103); aber wenn der Nenner durch Null geht, so ändert I das Zeichen, indem es durch das Unendliche geht, und plötzlich von $+\infty$ zu $-\infty$, wie in D, oder von $-\infty$ zu $+\infty$ überspringt. Die Coordinaten der Punkte der Curve, deren Ordinaten Maxima, oder Minima sind, genügen also einem der beiden folgenden Systeme simultaner Gleichungen:

$$f(x, y) = o, \quad f'_x(x, y) = o,$$
$$f(x, y) = o, \quad f'_y(x, y) = o,$$

und die Tangenten in diesen Punkten sind entweder zur Axe der x, oder zu der der y parallel.

Uebrigens entspricht einer Auflösung des einen, oder des andern der beiden letzten Gleichungssysteme nicht nothwendig ein Maximum, oder Minimum. Im Allgemeinen gibt das erste System die Punkte B, C, E, H, worin die Tangente zu der Axe der x parallel ist. In den drei ersten ist die Ordinate ein Maximum, oder Minimum; aber in dem letzten nicht. Das zweite System gibt die Punkte, worin die Tangente zur Axe der y parallel ist, und man muß sich überzeugen, ob wirklich ein Zeichenwechsel stattfindet.

Beispiel. — Für die Curve:

$$f(x,y) = \tfrac{1}{4}(y^4 + 2x^2y^2 + x^4 + 2c^2y^2 - 2c^2x^2 - a^4 + c^4) = o,$$

hat man:

$$f'_x(x,y) = x(x^2 + y^2 - c^2), \quad f'_y(x,y) = y(x^2 + y^2 + c^2),$$

folglich:

$$I = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)}.$$

Der Nenner von I kann nur für $y = o$ verschwinden; die Tangente ist in den Punkten A und A_1 (Fig. 56, 57, 58, 59) und in den Punkten C, C_1 (Fig. 59) zu der Axe der y parallel; die Abscissen dieser Punkte sind Maxima, oder Minima.

Der Zähler von I kann auf zwei Arten Null werden, nämlich erſtens für $x^2 + y^2 = c^2$, woraus folgt:

$$y = \pm \frac{a^2}{2c}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{4c^4 - a^4}{2c}}.$$

Dieſe Werthe ſind im zweiten und dritten Falle (§. 43) immer reell; aber im erſten Falle nur wenn $a < c\sqrt{2}$ iſt. Wenn man aus dem Anfangspunkte O mit dem Halbmeſſer c einen Kreis beſchreibt, ſo ſchneidet derſelbe, wenn $a < c\sqrt{2}$ iſt, die Curve in 4 Punkten D, D_1, D' und D'_1, worin die Tangente zur Axe der x parallel iſt. Wenn man ferner bemerkt: daß für die Punkte der innerhalb, oder außerhalb des Kreiſes liegenden Bogen der Curve $x^2 + y^2 - c^2 \lessgtr o$ iſt, ſo erhellet: daß I in jedem der vier Punkte das Zeichen ändert, und folglich die Ordinate y ein Maximum, oder Minimum iſt.

Der Zähler verſchwindet zweitens für $x = o$. In Fig. 56, welche dem Falle $a > c\sqrt{2}$ entſpricht, liegt der Kreis innerhalb der Curve; es iſt für die ganze Curve $x^2 + y^2 - c^2$ poſitiv; folglich geht in B die Größe I vom Poſitiven zum Negativen über, und es findet ein Maximum der Ordinate ſtatt. In Fig. 57, welche dem Falle entſpricht, wo $c\sqrt{2} > a > c$ iſt, liegt der Curvenbogen D'BD innerhalb des Kreiſes, $x^2 + y^2 - c^2$ iſt für alle Punkte dieſes Bogens negativ, I geht in B vom Negativen zum Poſitiven über, und es findet folglich ein Minimum der Ordinate ſtatt.

§. 60.

Concavität und Convexität.

Die nähere Unterſuchung der ſtetigen Aenderung der Größe I gibt auch näheren Aufſchluß über die Form der Curve. Denn wenn I mit x zugleich wächſt, ſo wächſt der Winkel α, welchen die Tangente mit der Axe der x bildet, und durch die Formel:

$$\text{tang } \alpha = \frac{I \sin \vartheta}{1 + I \cos \vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta + \frac{1}{I}}$$

gegeben wird, ebenfalls, und nimmt ſucceſſive die Werthe $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ (Fig. 104 und 105) an, indem die Curve ihre Concavität (hohle Seite) nach der Seite der poſitiven y oder nach oben kehrt.

Nimmt dagegen I ab, wenn x zunimmt, so nimmt der Winkel α auch ab, bekommt die successiven Werthe $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ (Fig. 106 und 107) und die Curve kehrt ihre Concavität nach der Seite der negativen y oder nach unten. — Die Fig. 104 u. 106 beziehen sich auf den Fall, wo $I > o$ und die Fig. 105 u. 107 auf den Fall, wo $I < o$ ist. — Die Curve kehrt also ihre Concavität nach der Seite der positiven, oder negativen y, jenachdem I mit zunehmendem x zu- oder abnimmt.

§. 61.

Inflexions- oder Wendepunkte.

Es kann geschehen, daß I bis zu einem gewissen Punkte M (Fig. 108) wächst und dann wieder abnimmt, so daß der Winkel α in diesem Punkte ein Maximum erreicht, und die zuerst nach der Seite der positiven y gekehrte Concavität der Curve ist später nach der Seite der negativen y gekehrt. — Wenn I bis zu einem gewissen Punkte M (Fig. 109) ab- und dann wieder zunimmt, so erreicht α daselbst ein Minimum, und die zuvor nach der Seite der negativen y gekehrte Concavität der Curve ändert ihre Richtung und kehrt sich nach diesem Punkte gegen die Seite der positiven y. Die Punkte M, worin eine Umkehrung der Concavität der Curve stattfindet, heißen Inflexions- oder Wendepunkte. — Bei einem gewöhnlichen Berührungspunkte liegen die beiden daranstoßenden Curventheile auf derselben Seite der Tangente, während in einem Inflexionspunkte die Curve von der einen Seite der Tangente auf die andere übergeht.

Wenn die Gleichung der Curve in entwickelter Form $y = f(x)$ gegeben ist, so nimmt $f(x)$ mit x gleichzeitig zu, oder ab, jenachdem die Ableitung $f'(x)$ positiv, oder negativ ist; und wenn man diesen Satz auf das Polynom $I = f'(x)$ anwendet; so gibt das Zeichen seiner Ableitung $f''(x)$ an, in welchem Sinne sich I ändert. — Die Curve kehrt also ihre Concavität nach der Seite der positiven, oder negativen y, jenachdem die zweite Ableitung $f''(x)$ von $y = f(x)$ positiv, oder negativ ist. Da ferner $f''(x)$ ihr Zeichen nur ändern kann, wenn sie durch Null geht; so folgt: daß die Abscissen der Inflexionspunkte durch die Gleichung $f''(x) = o$ gegeben werden.

Beispiel. — Es sei $y = f(x) = x^3 - x$ (Fig. 102), so ist $f'(x) = 3x^2 - 1$ und $f''(x) = 6x$. Da $f''(x)$ positiv,

oder negativ ist, jenachdem x es ist, so kehrt der Curventheil OBAC seine Concavität nach der Seite der positiven y, und der Theil $OB_1A_1C_1$ nach der Seite der negativen y.

§. 62.

Wenn die Gleichung der Curve in unentwickelter Form gegeben ist, so hat man:

$$f(x, y) = 0,$$
$$f'_x(x,y) + I\, f'_y(x,y) = 0, \qquad (i)$$

und wenn man y zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt; so erhält man eine Gleichung:

$$F(x, I) = 0,$$

welche als eine Curve ausdrückend angesehen werden kann, deren Abscisse x und deren Ordinate I ist. — Das Zeichen des Ausdruckes:

$$I' = -\frac{F'_x(x, I)}{F'_I(x, I)}$$

lehrt alsdann, ob I' zu- oder abnimmt, und folglich, gegen welche Seite die gegebene Curve ihre Concavität kehrt. — Allein man braucht diese Elimination nicht zu verrichten; denn wenn man die Ableitung I' von I nach Anhang, Formel (35) und (36) sucht, so erhält man leicht:

$$I' = -\frac{f''_{x^2} + I f''_{xy} + I(f''_{xy} + I f''_{y^2})}{f'_y}$$
$$= -\frac{f'^2_y f''_{x^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{y^2}}{f'^3_y}.$$

Hierbei wird bloß vorausgesetzt: daß f'_y nicht Null oder I' nicht unendlich wird. — Wenn die Punkte ausgenommen werden, worin die Tangente zur Axe der y parallel ist, so kann I' nur das Zeichen ändern, wenn sein Zähler das Zeichen ändert. Die Coordinaten der Inflexionspunkte genügen also den beiden Gleichungen:

$$f(x, y) = 0,$$
$$f'^2_y f''_{x^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{y^2} = 0. \qquad (k)$$

Wenn $f'_y = 0$ ist, so nimmt man die Ableitung von $\frac{1}{I}$ und man hat:

$$\frac{f'^2_x f''_{y^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_y f''_x}{f'^3_x} = -\frac{f''_{y^2}}{f'_x}.$$

Soll nun eine Inflexion stattfinden, so muß $f''_{y^2} = o$ sein, welcher Fall auch in der Gleichung (k) enthalten ist.

Beispiel. — Für die Conchoide (§. 42) hat man:

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\left[x^2y^2 - (c+x)^2(a^2-x^2)\right] = o$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[x^2y^2 + x^4 + 2cx^3 + (c^2-a^2)x^2 - 2a^2cx - a^2c^2\right] = o$$

$$f'_x(x,y) = xy^2 + 2x^3 + 3cx^2 + (c^2-a^2)x - a^2c$$

$$= \frac{(c+x)(x^3+a^2c)}{x},$$

$$f'_y(x,y) = x^2y, \quad f''_{x^2}(x,y) = y^2 + 6x^2 + 6cx + c^2 - a^2,$$

$$f''_{xy}(x,y) = 2xy, \quad f''_{y^2}(x,y) = x^2,$$

$$I = -\frac{(c+x)(x^2+a^2c)}{x^3y},$$

$$I' = -\frac{a^2(c+x)^3(x^3+3cx^2-2a^2c)}{x^6y^3}.$$

Das Trinom $x^3 + 3cx^2 - 2a^2c$ ist für $x = o$ negativ und für $x = a$ positiv; es verschwindet also in diesem Intervalle; aber nur einmal, weil seine Ableitung $3x^2 + 6cx$ in demselben Intervalle stets positiv bleibt. Es sei b die zwischen o und a liegende Wurzel der Gleichung:

$$x^3 + 3cx^2 - 2a^2c = o, \qquad (\mu)$$

und F (Fig. 53, 54 u. 55) der Punkt des Curvenzweiges AB, dessen Abscisse b ist; so ist I' von o bis b positiv und von b bis a negativ; folglich kehrt der Bogen BF seine Concavität nach der Seite der positiven y und FA nach der der negativen y; mithin ist F ein Inflexionspunkt.

Bei der nähern Untersuchung der negativen Wurzeln der Gleichung (μ) müssen die bei der Conchoide vorkommenden 3 Fälle unterschieden werden.

1) Es ist $a < c$. — Das in Rede stehende Trinom ist für $x = o$ negativ, für $x = -a$ positiv und für $x = -\infty$ negativ. Die Gleichung (μ) hat also zwei negative Wurzeln, wovon die eine zwischen o und $-a$, und die andere zwischen $-a$ und $-\infty$ liegt. — Die letzte hat in Fig. 53 keine Bedeutung, während die erste einem Inflexionspunkte G auf dem Zweige DE entspricht.

2) Es ist $a = c$. — Da das Trinom für $x = -a$ verschwindet, so läßt es sich folgendermaßen zerlegen:

$$(x+a)(x^2+2ax-a^2) = (x-a)\left[x+a(\sqrt{3}+1)\right]\left[x-a(\sqrt{3}-1)\right].$$

Die Abſciſſe des Punktes F iſt $= a(\sqrt{3} - 1)$, und da I' von D bis E ſtets poſitiv iſt; ſo kehrt der Curvenzweig DE (Fig. 54) ſeine Concavität nach der Seite der poſitiven y und hat keinen Inflexionspunkt.

3) Es iſt $a > c$. — Wenn man $x = x' - c$ in die Gleichung (μ) ſetzt, ſo geht ſie in folgende über:

$$x'^3 - 3c^2 x' - 2c(a^2 - c^2) = 0.$$

Wenn die Bedingung der Realität der Wurzeln $a \overline{\overline{<}} c\sqrt{2}$ nicht erfüllt wird, ſo hat die Gleichung (μ) nur die eine reelle Wurzel b, und das Trinom iſt für alle Punkte des Curvenzweiges ECKD (Fig. 55) negativ; I' hat ſtets das Zeichen +, der ganze Curvenzweig kehrt ſeine Concavität nach der Seite der poſitiven y, und hat folglich keinen Inflexionspunkt.

Wenn die Bedingung der Realität der Wurzeln erfüllt wird, ſo hat die Gleichung (μ) zwei negative Wurzeln, und da das Trinom für $x = -a$ negativ iſt; ſo liegen dieſe beiden Wurzeln zwiſchen 0 und $-a$, oder ſie ſind beide $< -a$. Der erſte Fall kann aber nicht ſtattfinden; denn da der Werth $x = -2c$, welcher die Ableitung $3x(x+2c)$ auf Null reducirt, zwiſchen dieſen beiden Wurzeln liegt, ſo wäre $a > 2c$, was der Bedingung der Realität der Wurzeln widerſpricht. — Da die negativen Wurzeln $< -a$ ſind, ſo iſt das Trinom für den ganzen Curvenzweig ECKD negativ, woraus daſſelbe folgt.

Wir haben im Vorhergehenden von den Punkten abſtrahirt, deren Coordinaten die beiden Ableitungen f'_x, f'_y zugleich verſchwinden machen, in welchem Falle die Ausdrücke von I und I' unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ erſcheinen; allein wir werden auf dieſen Fall ſpäter wieder zurückkommen.

Uebungsaufgaben.

1) Die Curve: $xy = 2a\sqrt{2ax - x^2}$ (Fig. 16) hat die beiden Inflexionspunkte: $x = \frac{3a}{2}$, $y = \pm\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

2) Die Curve: $x^3 - 3bx^2 + a^2 y = 0$ hat den Inflexionspunkt $x = b$, $y = \frac{2b^3}{a^2}$.

3) Die Curve: $ax^3 + by^3 - c^4 = 0$ hat die beiden Inflexionspunkte:

$$x = o,\ y = c\sqrt[3]{\frac{c}{b}},$$

$$x = c\sqrt[3]{\frac{c}{a}},\ y = o.$$

4) Die Curve: $x^4 - a^2x^2 + a^3y = o$ hat die zwei Inflexionspunkte:

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{6}},\ y = \frac{5a}{36}.$$

5) In der Curve: $y = x + 36x^2 + 2x^3 - x^4$ entsprechen $x = 3$ und $x = -2$ Inflexionspunkten.

6) In der Curve: $y = \frac{x}{1+x^2}$ entsprechen $x = o$ und $x = \pm\sqrt{3}$ Inflexionspunkten.

7) Die Curve: $x^2y + a^2y - ax^2 = o$ hat die beiden Inflexionspunkte:

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}},\ y = \frac{a}{4},$$

$$x = -\frac{a}{\sqrt{3}},\ y = \frac{a}{4}.$$

§. 63.

Bestimmung der Tangente einer durch zwei Gleichungen mit 3 Veränderlichen ausgedrückten Curve.

Wenn zwischen den beiden Coordinaten x, y und einer dritten Veränderlichen t zwei simultane Gleichungen:

$$f(x, y, t) = o,\quad F(x, y, t) = o \qquad (\alpha)$$

gegeben sind, und man eliminirt t zwischen denselben; so erhält man die Gleichung:

$$\varphi(x, y) = o$$

einer gewissen Curve. Aber das System der beiden Gleichungen (α) kann als diese Curve ebenfalls ausdrückend betrachtet werden. — Es seien x, y, t und $x + h$, $y + k$, $t + r$ die Werthe der drei Veränderlichen für zwei benachbarte Punkte M, M'; so hat man:

$$f(x, y, t) = o,\ f(x + h, y + k, t + r) = o,$$
$$F(x, y, t) = o,\ F(x + h, y + k, t + r) = o.$$

Setzt man Gr. $\frac{h}{r} = x'$, Gr. $\frac{k}{r} = y'$ und geht zur Grenze über; so hat man nach Anhang, Formel 24:

$$f'_t + f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y' = o,$$
$$F'_t + F'_x \cdot x' + F'_y \cdot y' = o.$$

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit F'_x, die zweite mit f'_x und zieht die Produkte von einander ab; so erhält man, wenn man bemerkt, daß:

$$\text{Gr.}\frac{k}{h} = \text{Gr.}\frac{\frac{k}{r}}{\frac{h}{r}} = \frac{y'}{x'}$$

ist, sehr leicht:

$$I = \text{Gr.}\frac{k}{h} = -\frac{F'_t f'_x - f'_t F'_x}{F'_t f'_y - f'_t F'_y}.$$

Beispiel. — Für die Curve in §. 49 hat man:

$$f = xy - yt + xt = o,\quad F = \tfrac{1}{2}(x^2 + t^4 - 4) = o,$$
$$f'_x = y + t,\quad f'_y = x - t,\quad f'_t = x - y,$$
$$F'_x = x,\quad F'_y = o,\quad F'_t = 2t^3,$$
$$I = \frac{2t^3(y+t) + x(y-x)}{2t^3(t-x)} = \frac{2t^5 + x^3}{2t^3(t-x)^2}.$$

Die Punkte, worin die Tangente zu der Axe der x parallel ist, werden durch die Gleichung $2t^5 + x^3 = o$ gegeben, und wenn man sich auf den zur Rechten der Axe der y liegenden Curventheil beschränkt; so muß t negativ sein. Der kleine Zweig OBA (Fig. 66) bietet folglich allein solche Punkte dar. Durch Elimination von x wird die vorhergehende Gleichung:

$$t_2^{12} + 4t^{10} - 3.4t^8 + 3.4^2.t^4 - 4^3 = o,$$

und wenn man $t^2 = z$ setzt:

$$z^6 + 4z^5 - 3.4z^4 + 3.4^2 z^2 - 4^3 = o,$$

oder:

$$-z^4(12 - 4z - z^2) - 4^2(4 - 3z^2) = o,$$

welche Gleichung zwischen o und 1 keine Wurzel hat, weil ihr erster Theil von $z = o$ bis $z = 1$ stets negativ ist. — Derselbe ist für $z = 2$ positiv, und seine Ableitung:

$$2z(3z^4 + 10z^3 - 6.4z^2 + 3.4^2) = 2z\left(z^2(3z^2 + 10z - 12) + 12(4 - z^2)\right)$$

von $z = 1$ bis $z = 2$ stets positiv. Die Gleichung hat also zwischen 1 und 2 eine reelle Wurzel, und es gibt auf dem Zweige OBA nur einen Punkt B, worin die Tangente zu der Axe der x parallel ist. Seine Abscisse liegt zwischen o und $\sqrt{3}$ und die zugehörige Ordinate ist ein Maximum.

§. 64.

Durch einen außerhalb der Curve gegebenen Punkt P gehende Tangente.

Die Gleichung der Curve unter ganzer Form ſei:

$$f(x, y) = 0; \qquad (1)$$

x_1, y_1 ſeien die Coordinaten des gegebenen Punktes P; x, y die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes und X, Y die laufenden Coordinaten; ſo iſt die Gleichung der Tangente:

$$(X - x)\, f'_x(x, y) + (Y - y)\, f'_y(x, y) = 0.$$

Da die Tangente durch den Punkt P oder (x_1, y_1) geht, ſo hat man auch:

$$(x_1 - x)\, f'_x(x, y) + (y_1 - y)\, f'_y(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Die beiden Gleichungen (1), (2) beſtimmen die Coordinaten x, y des geſuchten Berührungspunktes, d. h. die Berührungspunkte ſind nichts anders, als die Durchſchnittspunkte der gegebenen Curve mit der durch die Gleichung (2) ausgedrückten Curve. — Dieſe letzte Curve hat eine ziemlich merkwürdige geometriſche Bedeutung. Betrachtet man nämlich die in der Gleichung:

$$f(x, y) = C$$

enthaltenen Curven, wo C ein willkürlicher Parameter iſt, und zieht vom Punkte P aus Tangenten an dieſe verſchiedenen Curven; ſo bleibt die Gleichung (2) für alle *dieſelbe*, und drückt folglich den Ort der Berührungspunkte aus.

Wenn die gegebene Curve algebraiſch und vom mten Grade iſt, ſo iſt auch die Gleichung (2) vom mten Grade, und durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) kann man eine Gleichung von einem *niedrigern* Grade erhalten. — Wenn $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$, ... reſp. die Inbegriffe der Glieder vom m^{ten}, $(m-1)^{ten}$, $(m-2)^{ten}$, ... Grade in $f(x, y)$ bezeichnen, ſo iſt:

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \ldots = 0.$$

Das Polynom $\varphi(x, y)$, welches in Bezug auf x und y *homogen* iſt, beſteht aus Gliedern von der Form $Ax^n y^{m-n}$, und man hat daher:

$$\varphi(x, y) = \Sigma \,.\, Ax^n y^{m-n},$$

alſo:

$$\varphi'_x = \Sigma \,.\, n\, Ax^{n-1} y^{m-n},\ \varphi'_y = \Sigma\,(m-n)\, Ax^n y^{m-n-1},$$

woraus folgt:

$$x\varphi'_x + y\varphi'_y = \Sigma \,.\, m\, Ax^n y^{m-n} = m\varphi.$$

Ebenſo ergibt ſich:

$$x\psi'_x + y\psi'_y = (m-1)\psi,$$
$$x\chi'_x + y\chi'_y = (m-2)\chi.$$
$$\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Hiernach hat man:

$$xf'_x + yf'_y = m\varphi + (m-1)\psi + (m-2)\psi + \ldots,$$

und wenn man davon abzieht:

$$0 = m\varphi + m\psi + m\chi + \ldots;$$

ſo bleibt:

$$xf'_x + yf'_y = -\psi - 2\chi - \ldots.$$

Die Gleichung (2) läßt ſich aber auch folgendermaßen ſchreiben:

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y - xf'_x - yf'_y = 0,$$

und wird folglich:

$$x_1 f'_x(x,y) + y_1 f'_y(x,y) + \psi(x,y) + \chi(x,y) + \ldots = 0. \quad (3)$$

Dieſe Gleichung vom $(m-1)^{ten}$ Grade kann die Gleichung (2) erſetzen, ſo daß die geſuchten Berührungspunkte mittelſt der Durchſchnitte der gegebenen Curve (1) und der Curve (3) vom $(m-1)^{ten}$ Grade beſtimmt werden.

Beiſpiel. — Für den Kreis hat man:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (1)$$
$$(x_1 - x)x + (y_1 - y)y = 0, \quad (2)$$

oder:

$$\left(x - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{4},$$
$$x_1 x + y_1 y = r^2. \quad (3)$$

Die Gleichung (2) drückt einen über OP als Durchmeſſer beſchriebenen Kreis aus, welcher der Ort der Berührungspunkte der von P aus an eine Reihe um den Anfangspunkt O beſchriebener concentriſcher Kreiſe gezogenen Tangenten iſt.

Die Gleichung (3) drückt eine Gerade, die ſogenannte Berührungsſehne oder Berührungsgerade, aus; ſie iſt auf OP ſenkrecht, und der Halbmeſſer r iſt die mittlere Proportionale zwiſchen OP und dem Abſtande der Berührungsſehne von O.

Wenn die gegebene Curve vom zweiten Grade, ihre allgemeine Gleichung alſo:

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

iſt, ſo iſt die Gleichung der Berührungsgeraden:

$$(2Ax + By + D)x_1 + (2Cy + Bx + E)y_1 + Dx + Ey + 2F = 0,$$

oder:

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (2Cy_1 + Bx_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0.$$

§. 65.

Tangente, welche zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

Wenn a den Richtungscoefficienten der gegebenen Geraden bezeichnet, so werden die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes durch die beiden simultanen Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ f'_x(x, y) + a\, f'_y(x, y) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

§. 66.

Gemeinschaftliche Tangente an zwei gegebenen Curven.

Es seien:

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0$$

die Gleichungen der beiden Curven, und x', y'; x'', y'' die Coordinaten der Berührungspunkte; so hat man die beiden Gleichungen;

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{f'_{x'}(x', y')}{f'_{y'}(x', y')} = -\frac{F'_{x''}(x'', y'')}{F_{y''}(x'', y'')}, \qquad (5)$$

welche in Verbindung mit:

$$f(x', y') = 0, \quad F(x'', y'') = 0 \qquad (6)$$

die vier Unbekannten x', y'; x'', y'' bestimmen.

Beispiel. — Für zwei Kreise hat man:

$$\left.\begin{aligned} (x' - a')^2 + (y' - b')^2 &= r^2, \\ (x'' - a'')^2 + (y'' - b'')^2 &= r'^2, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{x' - a'}{y' - b'} = -\frac{x'' - a''}{y'' - b''}, \qquad (5)$$

woraus folgt:

$$\frac{x' - a'}{x'' - a''} = \frac{y' - b'}{y'' - b''} = \pm\frac{\sqrt{(x' - a')^2 + (y' - b')^2}}{\sqrt{(x'' - a'')^2 + (y'' - b'')^2}} = \pm\frac{r'}{r''}.$$

Nimmt man zunächst das Zeichen −, so hat man:

$$\frac{x' - a'}{x'' - a''} = -\frac{r'}{r''}, \quad \frac{y' - b'}{y'' - b''} = -\frac{r'}{r''},$$

woraus folgt:

$$\frac{r''x' + r'x''}{r' + r''} = \frac{r''a' + r'a''}{r' + r''}, \quad \frac{r''y' + r'y''}{r' + r''} = \frac{r''b' + r'b''}{r' + r''}. \qquad (7)$$

Theilt man die Mittelpunktslinie $C'C''$ (Fig. 110) in zwei Theile DC' und DC'', welche sich wie die Halbmesser r' und r'' verhalten; so sind die Coordinaten des Theilungspunktes D nach §. 36:

$$\frac{r''a' + r'a''}{r' + r''}, \qquad \frac{r''b' + r'b''}{r' + r''}.$$

Theilt man die gemeinſchaftliche Tangente M'M'' ebenſo, ſo ſind die Coordinaten des Theilungspunktes:

$$\frac{r''x + r'x''}{r' + r''}, \qquad \frac{r''y' + r'y''}{r' + r''}.$$

Beide Theilungspunkte fallen alſo vermöge der Gleichungen (7) zuſammen, und das erſte Paar gemeinſchaftlicher Tangenten geht durch den Punkt D.

Nimmt man nun das Zeichen +, ſo hat man:

$$\frac{r'x'' - r''x'}{r' + r''} = \frac{r'a'' - r''a'}{r' + r''}, \quad \frac{r'y'' - r''y'}{r' + r''} = \frac{r'b'' - r''b'}{r' + r''}, \tag{8}$$

und wenn $r' > r''$ geſetzt wird; ſo gibt es auf der Verlängerung von C'C'' einen Punkt E, deſſen Abſtände von den Punkten C' und C'' ſich wie die Halbmeſſer r' und r'' verhalten. Die Gleichungen (8) geben alſo ein zweites Paar durch den Punkt E gehender gemeinſchaftlicher Tangenten. — Nachdem die Punkte D und E gefunden ſind, kommt es blos noch darauf an: aus denſelben Tangenten an einen der beiden Kreiſe zu ziehen.

§. 67.

Gemeinſchaftliche Tangente an zwei Zweigen derſelben Curve.

Dieſe Aufgabe iſt offenbar nur ein beſonderer Fall der vorhergehenden, und wir wollen daher die Curve (§. 43), deren Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 - a^4 = 0,$$

ſofort als Beiſpiel nehmen. Die Gleichungen (5) und (6) des vorhergehenden §. ſind jetzt:

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{x'(x'^2 + y'^2 - c^2)}{y'(x'^2 + y'^2 + c^2)} = -\frac{x''(x''^2 + y''^2 - c^2)}{y''(x''^2 + y''^2 + c^2)}, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} (x'^2 + y'^2 + c^2)^2 - 4c^2x'^2 - a^4 &= 0, \\ (x''^2 + y''^2 + c^2)^2 - 4c^2x''^2 - a^4 &= 0. \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Die beiden letzten geben durch Subtraction:

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{(x'' + x')(x'^2 + y'^2 - c^2 + x''^2 + y''^2 - c^2)}{(y'' + y')(x'^2 + y'^2 + c^2 + x''^2 + y''^2 + c^2)}.$$

Der Quotient $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ iſt alſo drei Brüchen gleich. Addirt man die mit 2 multiplicirten Zähler der beiden erſten, zieht von der

Summe den des dritten ab, und combinirt die Nenner auf dieſelbe Weiſe; ſo erhält man:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{(x''-x')(x''^2+y''^2-x'^2-y'^2)}{(y''-y')(x''^2+y''^2-x'^2-y'^2)^2},$$

woraus folgt:

$$(x''^2+y''^2-x'^2-y'^2)\left[(x''-x')^2+(y''-y')^2\right]=0.$$

Der zweite Faktor kann aber nicht Null ſein, weil ſonſt die beiden Berührungspunkte zuſammenfielen; es iſt alſo:

$$x''^2+y''^2 = x'^2+y'^2,$$

und folglich wegen (10):

$$x'^2 = x''^2,\ y'^2 = y''^2.$$

Den Gleichungen (9) geſchieht Genüge, ſowohl durch:

$$x'^2+y'^2-c^2=0,$$

welches die Punkte D, D_1, D', D'_1 (Fig. 57) gibt, folglich die gemeinſchaftlichen Tangenten DD' und $D_1D'_1$, als durch:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x''}{y''},\ \text{folglich:}\ x' = -x'',\ y' = -y'';$$

aber die ſo erhaltenen, durch den Mittelpunkt gehenden gemeinſchaftlichen Tangenten EE' und $E_1E'_1$ (Fig. 59) exiſtiren nur in dem dritten Falle.

§. 68.

Berührungsbedingung zwiſchen zwei Curven.

Man ſagt: daß zwei Curven einander berühren, wenn ſie in einem gemeinſchaftlichen Punkte eine gemeinſchaftliche Tangente haben. — Die gegenwärtige Aufgabe iſt alſo ebenfalls nur ein beſonderer Fall von §. 66, wo die beiden Berührungspunkte in einen zuſammenfallen. Sind alſo x, y die Coordinaten des Berührungspunktes, ſo hat man zwiſchen den beiden Unbekannten x, y die drei Gleichungen:

$$f(x, y) = 0,\ F(x, y) = 0, \qquad (11)$$

$$\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad (12)$$

und folglich berühren zwei gegebene Curven einander nur unter beſondern Bedingungen. Enthalten nämlich die Gleichungen (11) willkürliche Parameter $a, b, \ldots$ und man eliminirt x, y, ſo erhält man eine Bedingungsgleichung zwiſchen $a, b, \ldots$,

welcher dieſe Parameter genügen müſſen, wenn die beiden Curven einander berühren ſollen.

Beiſpiel. — Für zwei Kreiſe hat man:

$$x^2+y^2=r^2,\ (x-a)^2+(y-b)^2=r'^2, \qquad (11)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{x-a}{y-b}=\frac{a}{b}. \qquad (12)$$

Aus der Gleichung (12) erhellet: daß der Berührungspunkt beider Kreiſe auf der Mittelpunktslinie liegt, und wenn man $a^2+b^2=d^2$ ſetzt; ſo hat man nach (12):

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{r}{d};$$

folglich:

$$x=\pm\frac{ar}{d},\ y=\pm\frac{br}{d},$$

und wegen der zweiten der Gleichungen (11):

$$(\pm r-d)^2-r'^2=0,\ (\pm r+r'-d)(\pm r-r'-d)=0.$$

Setzt man $r'>r$, ſo kann der zweite Factor nicht Null ſein, und man hat folglich:

$$d=r'\pm r;$$

d. h. die gegenſeitige Entfernung der Mittelpunkte beider Kreiſe muß der Summe, oder der Differenz ihrer Halbmeſſer gleich ſein, wenn ſie ſich berühren ſollen.

§. 69.

Geometriſcher Ort, welchen ein Punkt O′ (Fig. 27) beſchreibt, der mit einer beweglichen, ſtets zwei feſte gegebene Curven berührenden Curve feſt verbunden iſt.

Es ſei $f(x', y')=0$ die Gleichung der beweglichen Curve in Beziehung auf den Punkt O′ als Anfangspunkt und die feſt mit ihr verbundenen, alſo beweglichen Axen O′X′, O′Y′. Ferner ſeien in derſelben Ebene OX, OY zwei feſte Axen und $\varphi(x, y)=0$, $\psi(x, y)=0$ die Gleichungen der beiden feſten Curven in Bezug auf dieſe feſten Axen; ſo wird eine Lage der beweglichen Curve durch die Coordinaten x_1, y_1 des Punktes O′ und durch den Winkel α beſtimmt, welchen O′X′ mit OX bildet. Setzt man in die Gleichung $f(x', y')=0$ für x′, y′ ihre durch die Transformationsformeln gegebenen Werthe, ſo erhält man die Gleichung $F(x, y, x_1, y_1, \alpha)=0$ der beweglichen Curve in Bezug auf die feſten Axen. Drückt man alsdann aus: daß dieſe Curve die beiden feſten

Curven berührt, ſo erhält man zwiſchen x_1, y_1, α zwei Bedingungsgleichungen. und wenn man α zwiſchen denſelben eliminirt; ſo bekommt man endlich die geſuchte Gleichung mit x_1, y_1 des Ortes des Punktes O'.

Die Rechnung vereinfacht ſich ſehr, wenn die beiden Richtlinien gerade ſind und zu den Coordinatenaxen genommen werden. — Die Berührungsbedingungen erhält man alsdann, wenn man in der Gleichung $F(x, y, x_1, y_1, \alpha) = o$ ſucceſſive $x = o$ und $y = o$ ſetzt, und ausdrückt: daß jede der ſo erhaltenen Gleichungen mit einer Veränderlichen y oder x zwei gleiche Wurzeln hat.

Beiſpiel. — Welchen Ort beſchreibt der Pol einer Parabel, die ſich in einem rechten Winkel ſo bewegt, daß ſie die beiden Schenkel deſſelben ſtets berührt? — Um die Gleichung der Parabel in Beziehung auf ihren Pol zu erhalten, muß man in der Gleichung (9) in §. 7, $m = 1$ und $x + d$ ſtatt x ſetzen, wodurch man erhält:

$$y'^2 - 2dx' - d^2 = o,$$

und wenn man in dieſe Gleichung die Werthe:

$$x' = (x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x - x_1)\sin\alpha + (y - y_1)\cos\alpha$$

ſetzt; ſo erhält man als Gleichung der auf die feſten Aren bezogenen Parabel:

$$(x-x_1)^2\sin^2\alpha + (y-y_1)^2\cos^2\alpha - 2(x-x_1)(y-y_1)\sin\alpha\cos\alpha$$
$$- 2d(x-x_1)\cos\alpha - 2d(y-y_1)\sin\alpha - d^2 = o.$$

Setzt man hierin $y = o$, ſo erhält man:

$$(x - x_1)^2\sin^2\alpha + 2(y_1\sin\alpha - d)\cos\alpha \cdot (x - x_1)$$
$$+ (y_1^2\cos^2\alpha + 2dy_1\sin\alpha - d^2) = o,$$

und als Bedingung der Berührung mit der Are der x:

$$2y_1\sin\alpha = d.$$

Ebenſo erhält man als Bedingung der Berührung der Parabel mit der Are der y:

$$2x_1\cos\alpha = d,$$

und endlich als Gleichung des Ortes des Poles der beweglichen Parabel:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2} = \frac{4}{d^2}.$$

Sechstes Kapitel.

Tangenten in verſchiedenen Coordinatenſyſtemen.

§. 70.

Polarſyſtem.

In dieſem Syſteme wird die Lage der Tangente MT durch den Winkel $OMT' = \alpha$ (Fig. 111) beſtimmt, welchen ſie mit dem nach dem Berührungspunkte M gehenden Radiusvector OA bildet. Es ſeien ϱ, ϑ die Coordinaten des Punktes M und $\varrho + k$, $\vartheta + h$ die des benachbarten Punktes M'. Zieht man die Sekante MM' und beſchreibt aus dem Pole O mit dem Halbmeſſer OM den Kreisbogen MN, ſo gibt das Dreieck NMM':

$$\frac{\sin OM'M}{\sin NMM'} = \frac{\text{Sehne } MN}{M'N} = \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \cdot \frac{\text{Bogen } MN}{M'N}$$

$$= \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \cdot \frac{\varrho h}{k}. \qquad \text{(i)}$$

Läßt man nun die Sekante MM' ſich um den Punkt M ſo drehen, daß ſich M' dem Punkte M unbeſchränkt nähert, ſo wird die Sekante MM' an der Grenze zur Tangente MT, die Sehne MN wird zur Tangente an dem Bogen MN und mithin ſenkrecht auf OA; alſo Grenze von $OMM' = OMT' = \alpha$, und Grenze von $NMM' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Endlich iſt das Verhältniß eines Kreisbogens zu ſeiner Sehne bekanntlich an der Grenze der Kleinheit $= 1$, und folglich wird die Gleichung (i) an der Grenze:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \varrho \text{ Gr. } \frac{h}{k} \text{ oder tang } \alpha = \varrho \,.\, \text{Gr. } \frac{h}{k} = \frac{\varrho}{\text{Gr. } \frac{k}{h}}. \qquad (1)$$

Wir haben vorhin angenommen: daß der Radiusvector ϱ mit dem Winkel ϑ zugleich zunimmt; aber wenn ϱ abnimmt, während ϑ zunimmt (Fig. 112), ſo gibt das Dreieck NMM':

$$\frac{\sin OM'M}{-\sin NMM'} = \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \cdot \frac{\text{Bogen } MN}{-M'N} = \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \cdot \frac{\varrho h}{k}.$$

An der Grenze iſt aber $OM'M = \alpha$, $NMM' = \alpha - \frac{\pi}{2}$, und man erhält folglich die Gleichung (1) wieder.

§. 71.

Wenn ϱ für einen beſondern Werth ϑ_0 von ϑ verſchwindet (Fig. 113), ſo geht ein Curvenzweig OC durch den Pol O, und die Tangente an dieſem Zweige iſt die dem Winkel ϑ_0 entſprechende Gerade OA_0. Denn läßt man die durch einen Punkt M gehende Sekante OM ſich um den Punkt O ſo drehen, daß ſich der Punkt M dem Pole O unbeſchränkt nähert, alſo ϱ der Grenze Null; ſo nähert ſich die Sekante der Grenzlage unendlich.

So iſt z. B. die Polarare OX (Fig. 12) eine Tangente der Epicycloide in O; die Richtungen, für welche $\varrho = o$ iſt, ſind Tangenten an den Ringen in Fig. 68 u. 69.

Wenn die Gleichung der Curve trigonometriſche Funktionen des Winkels ϑ enthält, ſo iſt die Beſtimmung von Gr. $\frac{k}{h}$ nicht ſo leicht; allein wir wollen nun einige einfache Sätze ableiten, welche in vielen Fällen genügen.

1) Es ſei $\varrho = \sin \vartheta$, ſo iſt:

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin(\vartheta+h) - \sin\vartheta}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right);$$

folglich:

$$\text{Gr.}\ \frac{k}{h} = \cos\vartheta.$$

2) Es ſei $\varrho = \cos\vartheta$, ſo iſt:

$$\frac{k}{h} = \frac{\cos(\vartheta+h) - \cos\vartheta}{h} = -\frac{2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(\vartheta + \frac{h}{2}\right);$$

folglich:

$$\text{Gr.}\ \frac{k}{h} = -\sin\vartheta.$$

3) Es ſei $\varrho = \sin m\vartheta$, ſo ſetze man $m\vartheta = \vartheta'$, $mh = h'$, und man hat nach dem Obigen:

$$\frac{k}{h} = m \frac{k'}{h}, \text{ alſo Gr. } \frac{k}{h} = m \cos\vartheta' = m \cos m\vartheta.$$

4) Es sei $\varrho = \cos m\vartheta$, so findet man ebenso:

$$\text{Gr.}\frac{k}{h} = -m \sin m\vartheta.$$

Beispiel 1. — Für die Epicycloide (§. 9, 3) hat man $\varrho = 2a(1-\cos\vartheta)$; folglich:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\varrho}{2a\sin\vartheta} = \frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}} = \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2};$$

also $\alpha = \frac{\vartheta}{2}$.

Von O bis B (Fig. 13) wächst α von o bis $\frac{\pi}{2}$, so daß in B die Tangente auf dem Radiusvector senkrecht ist.

Beispiel 2. — Für die in der Gleichung $\varrho = a + \cos\frac{5\vartheta}{n}$ enthaltene Curve (§. 50) hat man:

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{5}{n}\cdot\frac{\varrho}{\sin\frac{5\vartheta}{n}}.$$

In den Punkten A, A′, A″, . . . (Fig. 67, 68 u. 69) ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$; die Curve berührt den großen Kreis. In den Punkten a, a′, a″, . . . ist ebenfalls $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und die Curve berührt den kleinen Kreis.

Die Subtangente und Subnormale beziehen sich in dem Polarsysteme auf das im Pole O (Fig. 113 a) auf dem Radiusvector OM errichtete Perpendikel PQ, und man findet leicht:

$$T = \varrho\sqrt{1+\frac{\varrho^2}{l^2}} = \frac{\varrho}{l}\sqrt{1+l^2}$$

$$N = \sqrt{\varrho^2 + l^2}$$

$$S_t = \frac{\varrho^2}{l},\quad S_n = l,$$ wo der Kürze wegen $\text{Gr.}\frac{k}{h} = 1$ gesetzt ist.

Kennt man eine dieser Größen, so kann man offenbar leicht die Tangente und Normale geometrisch construiren; aber in manchen Fällen ist es einfacher, den Winkel α zu construiren.

Beiſpiel 3. Für die Archimediſche Spirale:

$$\varrho = a\vartheta, \text{ (Fig. 10)}$$

hat man:

$$\text{tang}\,\alpha = \vartheta \text{ und } S_n = a.$$

Die Subnormale iſt alſo conſtant, und der Winkel, welchen die Tangente oder die Curve mit dem Radiusvector bildet, nähert ſich fortwährend einem rechten Winkel.

Beiſpiel 4. Für die hyperboliſche Spirale:

$$\varrho = \frac{a}{\vartheta}$$

hat man:

$$\text{tang}\,\alpha = -\vartheta, \; S_t = -a.$$

Hier iſt alſo die Subtangente conſtant.

Beiſpiel 5. Für die logarithmiſche Spirale:

$$\varrho = ae^{m\vartheta}$$

findet man leicht (ſ. Anhang):

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{m}, \; S_t = \frac{\varrho}{m}, \; S_n = m\varrho,$$

$$T = \varrho\,\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, \; N = \varrho\sqrt{1+m^2}.$$

Aus dem Werthe von tang α ſieht man: daß die Tangente mit dem Radiusvector einen conſtanten Winkel macht.

Beiſpiel 6. — Für den Lituus:

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{\vartheta}}$$

findet man leicht:

$$\text{tang}\,\alpha = -2\vartheta \text{ und } S_t = -2a\sqrt{\vartheta}.$$

Beiſpiel 7. — In der Lemniscate:

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$$

hat man:

$$\alpha = 2\vartheta - \frac{\pi}{2}.$$

Beiſpiel 8. — In der Spirale:

$$\varrho^n = a^n \sin n\vartheta$$

iſt:

$$\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,n\vartheta, \text{ alſo } \alpha = n\vartheta.$$

Wenn α_1 den Werth von α bedeutet, welcher dem Winkel $\vartheta + \pi$ oder der Tangente an dem andern Endpunkte der durch den Pol gehenden Sehne entſpricht; ſo iſt $\alpha_1 = n(\vartheta+\pi)$, alſo $\alpha_1 - \alpha = n\pi$.

Mithin ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten in den Endpunkten irgend einer durch den Pol gehenden Sehne constant.

§. 72.

Bipolarsystem.

In diesem Systeme wird die Lage der Tangente MT (Fig. 114) durch die beiden Winkel α, β bestimmt, welche die von den Polen O, O_1 nach dem Berührungspunkte M gehenden beiden Radienvectoren OM, O_1M mit ihr bilden. — Es seien u, v die Coordinaten des Punktes M und u+h, v+k die eines benachbarten Punktes M'. Zieht man die Sekante MM'S und beschreibt aus den Polen O, O_1 mit den Halbmessern OM, O_1M Kreisbogen MP, MQ; so geben die beiden Dreiecke MPM', MQM':

$$\frac{\sin M'MP}{\sin MPM'} = \frac{h}{MM'}, \quad \frac{\sin MQM'}{\sin M'MQ} = \frac{MM'}{k};$$

folglich:

$$\frac{\sin M'MP}{\sin M'MQ} = \frac{\sin MPM'}{\sin MQM'} \cdot \frac{h}{k}.$$

Geht man zur Grenze über, so werden MP, MQ resp. auf OM, O_1M senkrecht und die Winkel MPM', MQM' rechte; folglich:

$$\text{Gr. } M'MP = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \text{Gr. } M'MQ = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

und:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \text{Gr. } \frac{h}{k}.$$

Wenn λ, μ die Winkel bedeuten, welche die Normale der Curve mit den Vectoren bildet, so hat man:

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} = - \text{Gr. } \frac{h}{k}.$$

Ist nun die Gleichung der Curve unter der Form $f(\mu, v) = o$ gegeben, so ist:

$$\text{Gr. } \frac{h}{k} = - \frac{F'_v(u, v)}{F'_u(u, v)};$$

folglich:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = - \frac{F'_v(u, v)}{F'_u(u, v)},$$

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} = \frac{F'_v(u, v)}{F'_u(u, v)},$$

woraus sich folgende geometrische Construction ergibt: Auf den Vectoren nimmt man vom Punkte M aus zwei Längen, welche sich wie die Werthe der Ableitungen verhalten, so ist die Diagonale des aus diesen Längen construirten Parallelogrammes die Normale der Curve. Hiebei ist übrigens zu bemerken: daß jede dieser Längen auf dem Radiusvector selbst, oder auf seiner Verlängerung genommen werden muß, jenachdem die Ableitung positiv, oder negativ ist.

Beispiel 1. — Die Gleichung der Ellipse ist $u + v = 2a$, also $F'_u = 1$, $F'_v = 1$. Das Parallelogramm ist folglich eine Raute, und mithin halbirt die Normale den Winkel der Vectoren, und die Tangente macht mit den Vectoren gleiche Winkel.

Beispiel 2. — Die Gleichung der Hyperbel ist $u - v = 2a$, also $F'_u = 1$, $F'_v = -1$. Die Normale der Hyperbel halbirt also den von dem einen Radiusvector und der Verlängerung des andern gebildeten Winkels, und die Tangente halbirt den von den beiden Vectoren gebildeten Winkel.

Eine Ellipse und Hyperbel, welche dieselben Pole haben, durchschneiden sich hiernach rechtwinklig, das heißt ihre Tangenten im Durchschnittspunkte sind auf einander senkrecht.

§. 73.

Pol-Richtliniensystem.

In diesem Coordinatensysteme wird die Lage der Tangente durch die beiden Winkel α, β bestimmt, welche sie mit dem Radiusvector OM (Fig. 115) und mit dem auf die Richtlinie gefällten Perpendikel MP bildet. Zieht man durch M und einen naheliegenden Punkt M' eine Sekante, beschreibt aus dem Pole mit dem Halbmesser OM den Kreisbogen MN und zieht zu der Richtlinie die Parallele MQ; so geben die Dreiecke MNM', MQM' die Relationen:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \text{Gr.}\ \frac{h}{k} = -\frac{F'_v\,(u, v)}{F'_u\,(u, v)},$$

und für die Normale:

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} = \frac{F'_v\,(u, v)}{F'_u\,(u, v)}.$$

Beispiel 1. — Die Gleichung der Parabel in diesem Coordinatensysteme ist:

$u - v = o$, alſo $F'_u = 1$, $F'_v = -1$ und $\alpha = \beta$

Die Tangente halbirt alſo den Winkel OMP.

Hieraus folgt: daß zwei Parabeln, welche denſelben Pol und dieſelbe Axe haben, und deren Scheitel auf beiden Seiten des Poles liegen, ſich rechtwinklig durchſchneiden.

Beiſpiel 2. — Die Gleichung der Ellipſe und Hyperbel iſt in dieſem Syſteme:

$$\frac{u}{v} = m \text{ oder } u - mv = o,$$

folglich:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = m = \frac{u}{v}.$$

Man erhält alſo die Tangente, wenn man in O ein Perpendikel auf OM errichtet und den Durchſchnittspunkt deſſelben mit der Richtlinie mit dem Punkte M verbindet.

§. 74.

Allgemeines Coordinatenſyſtem.

Es ſei M (Fig. 116) ein Punkt der Curve, A, B die beiden Coordinatenlinien deſſelben und MC, MD ihre Normalen; ſo wird die Lage der Tangente MT durch die beiden Winkel α, β beſtimmt, welche ſie mit dieſen beiden Geraden bildet. Es ſei ferner M' ein naheliegender Punkt der Curve, A', B' ſeine Coordinatenlinien, p der zwiſchen A und A' liegende Theil der erſten Normale und q der zwiſchen B und B' liegende Theil der zweiten Normale; ſo geben die Dreiecke MPM', MQM':

$$\sin MM'P : \sin MPM' = p : MM',$$
$$\sin MM'Q : \sin MQM' = q : MM';$$

folglich:

$$\frac{\sin MM'P}{\sin MM'Q} = \frac{\sin MPM'}{\sin MQM'} \cdot \frac{p}{q}.$$

Geht man zur Grenze über, ſo wird M'P Tangente an A in M; alſo:

$$\text{Gr. } MM'P = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

und ebenſo, weil an der Grenze M'Q Tangente an B in M wird:

$$\text{Gr. } MM'Q = \frac{\pi}{2} - \beta;$$

folglich:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \text{Gr.}\ \frac{p}{q}.$$

In dem rechtwinkligen Coordinatenſyſteme ſind p, q nichts anders, als die Zuwachſe h, k von x, y, und folglich hat man:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \text{Gr.}\ \frac{h}{k},\quad \text{tang}\,\alpha = \text{Gr.}\ \frac{k}{h},$$

wie früher.

In dem Polarſyſteme iſt A ein Kreis, deſſen Normale der Vector OM iſt, B eine vom Pole ausgehende Gerade, die andere Normale das Perpendikel darauf, p der Zuwachs k des Radiusvectors, $q = \rho\, h$, und folglich wieder:

$$\text{tang}\,\alpha = \rho\ \text{Gr.}\ \frac{h}{k}.$$

In dem Bipolarſyſteme ſind A, B zwei aus den Polen beſchriebene Kreiſe, deren Normalen mit den Radienvectoren zuſammenfallen.

Siebentes Kapitel.

Von den Aſymptoten.

§. 75.

Wenn man einen unendlichen Curvenzweig AMB (Fig. 117) hat, ſo kann es geſchehen: daß der Abſtand MH eines ſich auf der Curve ins Unendliche entfernenden Punktes M von der Geraden CD kleiner wird, als jede gegebene oder angebbare Größe, d. h. Null zur Grenze hat — und alsdann wird die Gerade CD eine Aſymptote des Curvenzweiges genannt.

Wenn β den Winkel bezeichnet, welchen die Gerade CD mit der Axe der y macht, ſo hat man für die Differenz MN zwiſchen den derſelben Abſciſſe entſprechenden Ordinaten der Geraden und der Curve:

$$MN = \frac{MH}{\sin\beta},$$

und die Bedingung: Gr. MH = o geht über in die gleichbedeutende: Gr. MN = o. — Man kann daher auch ſagen: Eine

Asymptote ist eine Gerade von solcher Beschaffenheit, daß die Differenz der derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Geraden und der Curve gegen Null convergirt, wenn die Abscisse x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ convergirt (vergl. §. 41).

Wenn $\beta = 0$, d. h. die Asymptote zur Axe der y parallel ist, so ist die obige Umformung der Definition derselben unstatthaft; aber in diesem Falle ist die Differenz MN (Fig. 118) der derselben Ordinate entsprechenden Abscissen der Geraden und der Curve eine Größe, welche gegen Null convergirt, wenn y gegen $+\infty$ oder $-\infty$ convergirt, so daß die Abscissen der Curve gegen die endliche Grenze OE convergiren.

§. 76.

Asymptoten, welche zu der Axe der y parallel sind.

Diese Asymptoten erhält man nach dem Vorhergehenden, wenn man die endlichen Werthe von x sucht, welche y unendlich groß machen. — Wenn die Gleichung der Curve eine explicite, (für y aufgelöste) ist, so sind diese Werthe von x diejenigen, welche den Nenner des Ausdruckes von y verschwinden machen (§§. 42, 45), und wenn die Gleichung der Curve eine implicite ist; so findet man diese Werthe von x auf folgende Weise: Es sei m der Grad der Curve und n der höchste Exponent von y; so erhält man, wenn man die Gleichung der Curve nach y ordnet:

$$\varphi(x)\, y^n + \psi(x)\, y^{n-1} + \ldots + \pi(x) = 0,$$

wo $\varphi, \psi \ldots \pi$ Polynome mit x bedeuten, welche resp. höchstens vom Grade $m-n$, $m-n+1$, ... m sind. Dividirt man mit y^n, so hat man:

$$\varphi(x) + \psi(x)\frac{1}{y} + \ldots + \pi(x)\frac{1}{y^n} = 0.$$

Wenn nun, indem y gegen ∞ convergirt, x endlich bleibt, so verschwinden die Glieder von dem zweiten an, und an der Grenze hat man:

$$\varphi(x) = 0. \qquad (1)$$

Umgekehrt, wenn x gegen eine der Wurzeln der Gleichung (1) convergirt, so convergirt einer der Werthe von y gegen ∞. Die zu der Axe der y parallelen Asymptoten werden also durch die reellen Wurzeln der Gleichung (1) gegeben.

Beispiel. Die Gleichung der gegebenen Curve sei (§. 49):

$$x^4 y^4 + (x^2 - 4)(y - x)^4 = 0,$$

ſo findet man:

$$\varphi(x) = x^4 + x^3 - 4 = 0.$$

Die beiden reellen Wurzeln dieſer Gleichung ſind:

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}},$$

welche die bereits durch ein anderes Mittel gefundenen Aſymptoten geben (Fig. 66).

Jedoch gibt eine reelle Wurzel der Gleichung (1) nicht nothwendig eine Aſymptote, und man muß ſich noch überzeugen: daß, wenn x gegen eine Wurzel der Gleichung (1) convergirt, der gegen ∞ convergirende Werth von y reell iſt; denn wenn derſelbe imaginär iſt, ſo exiſtirt der unendliche Curvenzweig nicht. — Iſt z. B. die Gleichung der Curve:

$$y^2 (x - 1)^2 + (4 - x^2) = 0,$$

ſo iſt:

$$\varphi(x) = (x - 1)^2, \quad x = 1.$$

Aber wenn man x einen nahe bei 1 liegenden Werth gibt, ſo iſt y imaginär.

§. 77.

Aſymptoten, welche nicht zu der Axe der y parallel ſind.

Die Gleichung einer ſolchen Aſymptote iſt:

$$y_1 = cx + d,$$

wo c und d zwei zu beſtimmende Conſtanten ſind. Wenn y, y_1 die derſelben Abſciſſe entſprechenden Ordinaten der Curve und der Geraden bedeuten, und $y - y_1 = \varepsilon$ geſetzt wird; ſo iſt ε eine Funktion von x, welche gegen Null convergirt, wenn x gegen ∞ convergirt. Der betrachtete unendliche Curvenzweig wird folglich durch die Gleichung:

$$y = y_1 + \varepsilon = cx + d + \varepsilon \qquad (2)$$

ausgedrückt.

Beiſpiel. — Für die in §. 44 betrachtete Curve iſt:

$$y = x \pm \frac{2}{x^2} \sqrt{x^3 + 2x^2 - 5x - 6},$$

alſo:

$$y - y_1 = \varepsilon = \pm 2 \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3} - \frac{6}{x^4}}.$$

Es convergirt alſo ε gegen Null, wenn x gegen ∞ convergirt,

und folglich iſt die Gerade $y = x$ eine **Aſymptote**, ſo daß die beiden Curvenzweige AFD, AF_1D_1 (Fig. 60) den Durchmeſſer DD_1 zur Aſymptote haben.

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d}{x} - \frac{\varepsilon}{x},$$

und wenn d **endlich** bleibt und ε gegen **Null** convergirt, wenn x gegen ∞ convergirt; ſo iſt:

$$c = \text{Gr.}\ \frac{y}{x}.$$

Der Richtungscoefficient der Aſymptote iſt folglich nichts anders, als die Grenze gegen welche das Verhältniß $\frac{y}{x}$ convergirt, wenn x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ convergirt.

Aus der Gleichung (2) folgt auch:

$d = y - cx - \varepsilon$, alſo: $d = \text{Gr.}\ (y - cx)$.

§. 78.

Das **allgemeine Verfahren**, durch welches man wenigſtens bei **algebraiſchen** Curven die Werthe der beiden Parameter:

$$c = \text{Gr.}\ \frac{y}{x}, \quad d = \text{Gr.}\ (y - cx)$$

beſtimmt, iſt folgendes: Nachdem die Gleichung der Curve auf eine **ganze** Form gebracht iſt, faßt man die Glieder von **gleichen** Dimenſionen in eins zuſammen, wie in §. 64, ſo daß man hat:

$$F(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \ldots = 0.$$

Setzt man in dieſer Gleichung ux für y, ſo wird, weil $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, ... **homogene** Polynome reſp. vom Grade m, m−1, ... ſind:

$$\varphi(x, y) = x^m \varphi(1, u), \quad \psi(x, y) = x^{m-1} \psi(1, u), \ldots$$

und wenn man mit x^m dividirt; ſo nimmt die Gleichung der Curve folgende Form an:

$$\varphi(1, u) + \psi(1, u)\frac{1}{x} + \chi(1, u)\frac{1}{x^2} + \ldots = 0. \qquad (3)$$

Convergirt nun $u = \frac{y}{x}$ gegen einen **endlichen** Werth c, während

x gegen ∞ convergirt, so verschwinden an der Grenze alle Glieder von dem zweiten an, und man hat:

$$\varphi(1, c) = 0. \qquad (4)$$

Umgekehrt, wenn c gegen eine Wurzel der Gleichung (4) convergirt, so convergirt ein Werth von x gegen ± ∞.

Die Richtungscoefficienten der Asymptoten werden also durch die reellen Wurzeln der Gleichung gegeben, welche man erhält, wenn man den Theil $\varphi(x, y)$ der gegebenen Gleichung, welcher von der höchsten Dimension ist, $= 0$ und darin $x = 1$, $y = c$ setzt.

Weiter oben wurde gesetzt:

$$u = \frac{y}{x} = \frac{cx + d + \varepsilon}{x} = c + \frac{d + \varepsilon}{x},$$

und wenn jetzt $d + \varepsilon = k$ gesetzt wird; so ist $u = c + \frac{k}{x}$. Setzt man nun diesen Werth für u in die Gleichung (3) und entwickelt, so kommt (Anhang, Formel 38):

$$0 = \varphi(1, c) + \varphi'_c(1, c)\frac{k}{x} + \tfrac{1}{2}\varphi''_{c^2}(1, c)\frac{k^2}{x^2} + \ldots.$$
$$+ \psi(1, c)\frac{1}{x} + \psi'_c(1, c)\frac{k}{x^2} + \ldots.$$
$$+ \chi(1, c)\frac{1}{x^2} + \ldots.$$

und wenn man mit x multiplicirt, so erhält man wegen $\varphi(1, c) = 0$:

$$0 = \left[\varphi'_c(1, c)\, k + \psi(1, c)\right] + A\frac{1}{x} + B\frac{1}{x^2} + \ldots. \qquad (\mu)$$

Läßt man jetzt x gegen ∞ convergiren, so convergirt k gegen einen endlichen Werth d, und man hat an der Grenze:

$$\varphi'_c(1, c)\, d + \psi(1, c) = 0,$$

also:

$$d = -\frac{\psi(1, c)}{\varphi'_c(1, c)}, \qquad (5)$$

woraus man sieht, wie die Constante d, welche für die Asymptote die Ordinate im Anfangspunkte ausdrückt, gefunden wird.

Die Gleichungen (4) und (5) geben mithin alle, nicht zu der Axe der y parallelen Asymptoten. — Da die Gleichung (4) höchstens vom nten Grade ist und die Gleichung (5) für jeden Werth von c nur einen Werth von d gibt; so gibt es höchstens n nicht zu der Axe der y parallele Asymptoten, und da es höchstens $m - n$ zu

der Axe der y parallele Asymptoten gibt, so folgt: daß eine algebraische Curve des m^{ten} Grades höchstens m Asymptoten hat.

Beispiel. — Die Gleichung der gegebenen Curve sei (§. 45):

$$y^2 (x + a) - x (x - a) (x - b) = o$$

oder:

$$(xy^2 - x^3) + (ay^2 + (a + b) x^2) - abx = o,$$

so gibt zunächst $x = -a$ eine zu der Axe der y parallele Asymptote E_1E (Fig. 61).

Ferner ist:

$$\varphi(1, c) = o = c^2 - 1, c = \pm 1, d = -\frac{ac^2 + a + b}{2c} = \mp\frac{2a + b}{2}.$$

Es gibt also zwei Asymptoten HH_1, KK_1, welche zu den Halbirungslinien der Axenwinkel parallel sind und sich auf der Axe der x in einer Entfernung $OI = a + \frac{b}{2}$ vom Anfangspunkte schneiden.

§. 79.

Bemerkungen.

1) Wenn man auch für c und d ein System reeller endlicher Werthe gefunden hat, so folgt daraus noch nicht: daß es eine Asymptote gibt — und man muß sich außerdem von der Realität des unendlichen Curvenzweiges überzeugen.

2) Wenn der betrachtete Werth von c den Ausdruck $\varphi'_c(1, c)$ auf Null reducirt, aber $\psi(1, c)$ nicht; so nimmt k mit x zugleich unendlich zu, weil sonst $\psi(1, c) = o$ wäre. Die Asymptote liegt also in unendlicher Entfernung, d. h. sie existirt nicht. — Es hat also ein unendlicher Curvenzweig nicht immer eine Asymptote, was z. B. schon bei den Curven $y^n - x^m = o$ der Fall ist. — Für die Parabel $y^2 - 2px = o$ hat man $c = o$ und $d = \infty$.

3) Wenn der Werth von c zugleich $\varphi'_c(1, c)$ und $\psi(1, c)$ verschwinden macht, so hat man zur Bestimmung von d eine Gleichung des zweiten Grades:

$$\tfrac{1}{2}\varphi''_{c^2}(1, c) d^2 + \psi'_c(1, c) d + \chi(1, c) = o,$$

welche zwei parallele Asymptoten gibt; aber der betreffende Werth von c ist eine doppelte Wurzel der Gleichung $\varphi(1, c) = o$, so daß der obige Lehrsatz über die Anzahl der Asymptoten noch stattfindet.

Beiſpiel. — Es ſei:

$$xy^2 + ay^2 - a^2x + a^3 = 0,$$

ſo iſt: $\varphi(1, c) = c^2$, $c = 0$, $\varphi'_c(1, c) = 2c$, $\varphi''_{c^2}(1, c) = 2$,

$\psi(1, c) = ac^2$, $\psi'_c(1, c) = 2ac$, $\chi(1, c) = -a^2$.

Da der Werth $c = 0$ die Ausdrücke $\varphi'_c(1, c)$, $\psi(1, c)$ auf Null reducirt, ſo muß man zu der Gleichung des zweiten Grades $d^2 - a^2 = 0$ übergehen, welche gibt: $d = \pm a$; und es gibt folglich zwei zu der Axe der x parallele Aſymptoten.

§. 80.

Aſymptoten als Grenzen der Tangenten

Es ſei MT (Fig. 118) eine Tangente in M, und wir wollen uns vorſtellen, daß ſich der Berührungspunkt M auf der Curve AB ins Unendliche entfernt; ſo nähert ſich die Tangente einer Grenzlage CD, welche wir zu beſtimmen ſuchen wollen. — Die Gleichung der Tangente im Punkte M oder (x, y) iſt:

$$Y - y = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(X - x),$$

oder: $$Y = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}X + \left(y + \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \cdot x\right)$$

und es kommt darauf an zu finden:

$$\text{Gr.} -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \text{ und Gr.} \left(y + \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}x\right).$$

Nach §. 64 iſt:

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -\psi(x, y) - 2\psi(x, y) - \ldots, \quad \text{(i)}$$

woraus folgt, wenn man $\frac{y}{x} = u$ ſetzt:

$$-\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{y}{x} + \frac{\psi(1, u)}{xf_u(1, u)} + \frac{2\chi(1, u)}{x^2 f'_u(1, u)} + \ldots$$

Convergirt nun x gegen ∞, ſo convergiren die Glieder vom zweiten an gegen Null, und es iſt folglich:

$$\text{Gr.} -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \text{Gr.} \frac{y}{x} = c.$$

Dieſelbe Gleichung (i) gibt:

$$\frac{xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{\psi(x, y) + 2\chi(x, y) + \ldots}{\varphi'_y(x, y) + \chi'_y(x, y + \ldots}$$

$$= -\frac{\psi(1, u) + 2\frac{1}{x}\chi(f, u) + \ldots}{\varphi'_u(1, u) + \frac{1}{x}\chi'_u(1, u) + \ldots};$$

folglich:

$$\text{Gr.}\left(y+\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}x\right)=-\frac{\psi(1,c)}{\varphi'c(1,c)}=d.$$

Die Grenze der Tangenten iſt alſo nichts anders, als die Aſymptote.

§. 81.

Lage der Curve gegen die Aſymptote.

Das Zeichen der Differenz $y-y_1=\varepsilon$ lehrt, ob die Curve über, oder unter der Aſymptote liegt. Wenn in der Gleichung (μ) in §. 78, $d+\varepsilon$ für k geſetzt wird, ſo erhält man:

$$\varphi'c(1,c)\varepsilon+\frac{1}{x}\left[\varphi''c^2(1,c)\frac{d^2}{2}+\psi'c(1,c)d+\chi(1,c)+\ldots\right]=0,$$

folglich:

$$\varepsilon=\frac{1}{x}\left[-\frac{\varphi''c^2(1,c)\frac{d^2}{2}+\psi'c(1,c)d+\chi(1,c)}{\varphi'c(1,c)}+B\varepsilon+C\frac{1}{x}+\ldots\right].$$

Die Glieder der in den Klammern ſtehenden Größe enthalten von dem zweiten an den Factor ε, oder $\frac{1}{x}$, und es gibt folglich einen Werth von x, von welchem an der Zahlenwerth des erſten Gliedes größer iſt, als die Summe der Zahlenwerthe aller folgenden Glieder, ſo daß das Zeichen des erſten Gliedes das Zeichen der ganzen in den Klammern ſtehenden Größe iſt. Der unendliche Zweig einer algebraiſchen Curve bleibt alſo von einem gewiſſen Punkte an ſtets auf derſelben Seite der Aſymptote, und das Zeichen des erſten Gliedes:

$$A=-\frac{\varphi''c^2(1,c)\frac{d^2}{2}+\psi'c(1,c)d+\chi(1,c)}{\varphi'c(1,c)}$$

gibt an, auf welcher Seite.

Beiſpiel. — Für die in §. 45 betrachtete Curve iſt, wenn nur der Werth $c=1$ in Betracht gezogen wird:

$$A=\tfrac{1}{2}\left(a^2+ab-\frac{b^2}{4}\right),$$

und es ſind drei Fälle zu unterſcheiden:

1) Es iſt $b<2a(\sqrt{2}+1)$. — In dieſem Falle iſt A poſitiv und ε poſitiv auf der Seite der poſitiven x, und

negativ auf der Seite der negativen x. Der Curvenzweig CD (Fig. 63 u. 64) liegt mithin über der Asymptote IH, und der Zweig F, G_1 unter der Asymptote HH_1.

2) Es ist $b > 2a\,(\sqrt{2}+1)$. In diesem Falle ist A negativ, und es findet das Gegentheil statt (Fig. 61).

3) Es ist $b = 2a\,(\sqrt{2}+1)$. Hier ist $A = 0$, die Gleichung mit ε reducirt sich auf:

$$\varepsilon\left[\varphi'c\,(1,c)+\frac{1}{x}\left(\varphi''c^2(1,c)d+\varphi''c^2(1,c)\,\frac{\varepsilon}{2}+\psi'c\,(1,c)\right)\right]$$
$$+\psi'c\,(1,c)\,\frac{d^2}{2x^2}+\ldots=0,$$

und das Zeichen von ε ist das von $-\frac{\psi''c^2\,(1,c)}{\varphi'c\,(1,\,c)}=-\frac{a}{c}=-a$. Die beiden Zweige CD, E_1G_1 (Fig. 62) liegen also unter der Asymptote.

Uebersicht.

$$b > a \begin{cases} b > 2a\,(\sqrt{2}+1), & \text{Fig. 61,} \\ b = 2a\,(\sqrt{2}+1), & \text{Fig. 62,} \\ b < 2a\,(\sqrt{2}+1), & \text{Fig. 63,} \end{cases}$$
$b = a$, Fig. 64,
$b < a$, Fig. 63.

§. 82.

Vorhin haben wir gesehen: daß bei algebraischen Curven ein unendlicher Zweig von einem gewissen Punkte an stets auf derselben Seite der Asymptote bleibt, was bei transcendenten Curven nicht immer der Fall ist. So geht z. B. die Curve $y=\frac{\sin x}{x}$ ohne Ende von der einen Seite der Axe der x zur andern über, indem sie sich dieser Axe immer mehr nähert und die Oscillationen dieselbe Amplitude haben, während diese Amplitude bei der Curve $y=\frac{\sin x^2}{x}$ fortwährend abnimmt.

Bisher haben wir den Asymptotismus nur zwischen einer Curve und einer Geraden untersucht; aber man könnte diese Theorie auch verallgemeinern und den Asymptotismus zwischen zwei Curven untersuchen. So z. B. ist die Parabel $y = x^2$ eine Asymptote der Curve $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

Wenn man auf irgend eine Weiſe die Ordinate y in eine Reihe entwickelt, welche nach den abnehmenden Potenzen von x fortſchreitet, ſo daß man hat:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \frac{a_{-3}}{x^3} + \ldots\ldots$$

und man ſetzt jetzt $x = \infty$; ſo erhält man offenbar als Gleichung der krummlinigen Aſymptote:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Wenn $n = 1$ iſt, ſo iſt die Gleichung der geradlinigen, nicht zu der Axe der y parallelen Aſymptote:

$$y = a_1 x + a_0.$$

Iſt $n = 2$, ſo iſt die Gleichung der paraboliſchen Aſymptote:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0;$$

u. ſ. f.

Beiſpiel. — Die Gleichung der Curve ſei:

$$x^3 - ay(x - b) = 0$$

oder:

$$y = \frac{x^3}{a(x-b)},$$

ſo erhellet zunächſt: daß die $x = b$ entſprechende Ordinate eine geradlinige Aſymptote iſt. Die Curve hat aber auch eine paraboliſche Aſymptote, welche man erhält, wenn man

$$y = \frac{x^2}{a}\left(1 - \frac{b}{x}\right)^{-1}$$

in eine Reihe entwickelt und dann $x = \infty$ ſetzt. — Auf dieſe Weiſe erhält man als Gleichung dieſer Aſymptote:

$$ay = x^2 - bx + b^2$$

oder:

$$ay - \tfrac{3}{4}b^2 = (x - \tfrac{1}{2}b)^2,$$

welche eine gewöhnliche Parabel ausdrückt, deren Parameter $= a$ und deren Axe zu der der y parallel iſt.

§. 83.

Aſymptoten im Polarſyſteme.

In dieſem Syſteme kann ein Curvenzweig auf drei verſchiedene Arten unendlich werden, nämlich 1) ρ nimmt unbeſchränkt zu, wenn ϑ gegen einen feſten Werth α convergirt, oder 2) ρ conver-

girt gegen einen festen Werth a, wenn ϑ unbeschränkt wächst, oder 3) sowohl ρ als ϑ nimmt unendlich zu.

1) Es sei AMB (Fig. 119) ein Curvenzweig, dessen Radiusvector $\rho = OM$ gegen ∞ convergirt, wenn ϑ gegen den Winkel $LOX = \alpha$ convergirt: so ist:

$$\text{tang}\,\vartheta = \frac{y}{x}, \quad \text{tang}\,\alpha = \text{Gr.}\,\frac{y}{x} = c.$$

Die geradlinige Asymptote CD, wenn sie existirt, ist also zu dem unendlichen Vector OL parallel, und es ist blos noch die gegenseitige Entfernung OC dieser beiden Parallelen zu finden. Es ist aber offenbar:

$$OC = \text{Gr.}\,MK = \text{Gr.}\,\rho \sin(\vartheta - \alpha),$$

wo die Länge OC auf der in O auf OL senkrechten Geraden zur Linken, oder Rechten von O genommen werden muß, jenachdem sie positiv, oder negativ ist.

Beispiel. — Für die Hyperbel ist (§. 7), (Fig. 9):

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}, \quad e > 1,$$

und wenn α den Winkel bezeichnet, dessen Cosinus $= -\frac{1}{e}$ ist; so wächst ρ von $\frac{p}{1+e}$ bis ∞, wenn ϑ von o bis α wächst. Ferner hat man:

$$MK = \frac{p\sin(\alpha-\vartheta)}{1+e\cos\vartheta} = -\frac{p}{e}\cdot\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos\alpha-\cos\vartheta} = -\frac{p}{e}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\vartheta)};$$

folglich:

$$OC = \text{Gr.}\,MK = -\frac{p}{e\sin\alpha} = \frac{-p}{\sqrt{e^2-1}},$$

und wenn man diese Länge zur Rechten von OL nimmt; so erhält man die Lage der Asymptote CD. Endlich ist:

$$MK - OC = \varepsilon = \frac{p}{e}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\frac{1}{2}(\vartheta-\alpha) - \sin\frac{1}{2}(\vartheta+\alpha)}{\sin\alpha\,\sin\frac{1}{2}(\vartheta-\alpha)}$$

$$= -\frac{p\cos\alpha\,\sin\frac{1}{2}(\vartheta-\alpha)}{\sin\alpha\,\sin\frac{1}{2}(\vartheta+\alpha)}.$$

Der Curvenbogen liegt also zwischen OL und der Asymptote.

2) Wenn ρ gegen einen festen Werth a convergirt, während ϑ unendlich wächst: so hat man eine Spiralasymptote des Kreises von dem Halbmesser a. — Es sei z. B. die Gleichung der gegebenen Curve;

$$\varrho = \frac{2a\vartheta}{2\vartheta - 1} = \frac{a}{1 - \frac{1}{2\vartheta}},$$

so convergirt ϱ abnehmend gegen a, wenn ϑ gegen $+\infty$ convergirt, wodurch man eine außerhalb des Kreises $\varrho = a$ liegende Spiralasymptote erhält. — Wenn ϑ gegen $-\infty$ convergirt, so convergirt ϱ wieder gegen a, aber wachsend, und man bekommt eine innerhalb desselben Kreises liegende Spiralasymptote. Beide Spiralen laufen übrigens in zwei unendliche Curvenzweige AB, A'B' (Fig. 120) aus, welche dieselbe geradlinige Asymptote CD haben.

Zuweilen reducirt sich der Halbmesser a des Kreises auf Null, und alsdann ist die Spirale Asymptote eines Punktes. So z. B. windet sich die Spirale $\varrho = \frac{a}{\vartheta}$ unaufhörlich um den Pol, indem sie sich demselben immer mehr und mehr nähert.

3) Wenn ϱ und ϑ zugleich gegen ∞ convergiren, wie bei der Archimedischen Spirale $\varrho = a\vartheta$, so hat die Curve weder eine kreisförmige, noch eine geradlinige Asymptote.

Uebungsaufgaben.

1) Die Curve $y^3 = ax^2 + x^3$ hat die Asymptote: $y = x + \frac{a}{3}$.

2) Die Curve $y^2 = \frac{x^3 + ax^2}{x - a}$ hat drei Asymptoten, nämlich die $x = a$ entsprechende Parallele zur Axe der y und die beiden durch die Gleichungen $y = \pm (x + a)$ ausgedrückten Geraden.

3) Die Curve:

$$y = \frac{x^3 - 3ax^2 + a^3}{x^3 - 3bx + 2b^2}$$

hat drei Asymptoten, nämlich die $x = b$, $x = 2b$ entsprechenden Ordinaten und die durch die Gleichung:
$y = x - 3(a - b)$ ausgedrückte Gerade.

4) Die Curve: $ay^3 - bx^3 + c^2xy = o$ hat die Asymptote:

$$y = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\left(x - \frac{c^2}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\right).$$

5) Die Curve: $y^4 - x^4 + 2bx^2y = o$ hat die beiden Asymptoten:

$$y = x - \frac{b}{2},\quad y = -\left(x + \frac{b}{2}\right).$$

6) Die Curve: $a^2 y^2 - b^3 y - x^4 = 0$ hat die beiden parabolischen Asymptoten:

$$x^2 = a\left(y - \frac{b^2}{a}\right), \quad x^2 = a\left(\frac{b^2}{a} - y\right).$$

7) Die Curve: $y = \frac{x}{1+x^2}$ hat die Axe der x zur Asymptote.

8) Die Curve: $\sqrt{y} = \frac{a}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$ hat zwei Asymptoten, wovon die eine mit der Axe der x einen Winkel von 45° macht und die andere auf dieser Axe senkrecht ist.

9) Die Curve: $ax^4 + 4c^3 xy - by^4 = 0$ hat eine durch den Anfangspunkt gehende Asymptote, welche mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente

$$= \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \text{ ist.}$$

10) Die Curve, deren Polargleichung ist:

$$\sqrt{2a\,\varrho - \varrho^2} = \frac{1}{\vartheta}$$

hat den Kreis von dem Halbmesser $= 2a$ und den Pol zu Asymptoten.

11) Die Curve:

$$\varrho = \frac{a\,\vartheta^2}{\vartheta^2 - 1} \text{ (Fig. 81)}$$

hat zwei geradlinige Asymptoten, welche mit der Polaraxe Winkel $= \pm 1$ bilden, und eine Kreisasymptote von dem Halbmesser $= a$.

12) Curve: $(x - 2)\,y = (x - 1)\,(x - 3)$,
Asymptote: $y = x - 2$.

13) Curve: $(x + 1)\,y = (x - 1)\,x$,
Asymptote: $y = x - 3$.

14) Curve: $x^2 - y^2 - a^2 = 0$,
Asymptote: $y = \pm x$.

15) Curve: $ay^3 + x^3 y - ax^3 = 0$,
Asymptote: $y = -a$.

16) Curve: $(x^2 - 1)\,y = (x^2 + 1)\,x$,
Asymptote: $x = \pm 1$, $y = x$.

17) Curve: $y^3 - 2xy^2 + x^2 y - a^3 = 0$
Asymptoten: $y = x$, $y = 0$.

18) Curve: $xy^2 - y = ax^3 + bx^2 + cx + e$,

Asymptoten: $y = \pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$, $x = 0$.

Achtes Kapitel.

Von den Einhüllungs- oder Grenzcurven.

§. 84.

Wenn man eine Gleichung:

$$f(x, y, a) = 0 \qquad (1)$$

hat, worin a ein willkürlicher Parameter ist, so entspricht jedem besondern Werthe von a auch eine besondere Curve, und die den beiden Werthen a und $a+h$ des Parameters entsprechenden beiden Curven schneiden sich im Allgemeinen in einem gewissen Punkte M' (Fig. 121), dessen Coordinaten den beiden simultanen Gleichungen:

$$f(x, y, a) = 0,\ f(x, y, a+h) = 0 \qquad (2)$$

genügen. Wenn man in diesen Gleichungen h als *constant* und a als *veränderlich* betrachtet, so erhält man den Ort der Punkte M', wo jede der Curven $f(x, y, a) = 0$ von der Curve $f(x, y, a+h)$ geschnitten wird, und um die Gleichung dieses Ortes zu erhalten, muß man a zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren.

Der Ort, welcher den Durchschnittspunkt M' von $f(x, y, a) = 0$ mit $f(x, y, a + h) = 0$ und den Durchschnittspunkt M_1 von $f(x, y, a - h) = 0$ mit $f(x, y, a) = 0$ enthält, hat zwei seiner Punkte M' und M_1 auf der Curve $f(x, y, a) = 0$, und die Sehne $M_1 M'$ ist dem Orte und der letzten Curve gemein. — Läßt man nun h unendlich abnehmen, so nähern sich die beiden Punkte M', M_1 derselben Grenzlage M und die gemeinschaftliche Sehne wird eine gemeinschaftliche Tangente der Curve $f(x, y, a) = 0$ und des Ortes der Punkte M. — Dieser Ort wird der *Ort der successiven Durchschnittspunkte der durch die Gleichung (1) ausgedrückten Curven* genannt. Da derselbe alle diese Curven berührt, so *umschließt* oder *umhüllt* er dieselben gleichsam, und wird deshalb auch die *Einschließungs-* oder *Einhüllungscurve* genannt (Fig. 122).

Es kann geſchehen: daß die Curve $f(x, y, a) = o$ die Curve $f(x, y, a + h) = o$ in mehr als einem Punkte ſchneidet, und alsdann berührt die Einhüllungscurve jede umhüllte Curve in mehreren Punkten.

§. 85.

Gleichung der Einhüllungscurve.

Für die Gleichungen (2) kann man die beiden folgenden ſetzen:

$$f(x, y, a) = o, \frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = o,$$

welche den Ort der Punkte M' ausdrücken, wenn a veränderlich iſt. — Der Ort der Punkte M wird folglich durch die beiden ſimultanen Gleichungen:

$$f(x, y, a) = o, \text{ Gr. } \frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = o \quad (4)$$

ausgedrückt; d. h. die Einhüllungscurve wird durch die beiden Gleichungen:

$$f(x, y, a) = o, \quad f'_a(x, y, a) = o \quad (5)$$

ausgedrückt, und man erhält ſie durch eine Gleichung ausgedrückt, wenn man a zwiſchen dieſen beiden letzten Gleichungen eliminirt.

Beiſpiel. — Man ſoll die Umhüllungscurve der Geraden:

$$\frac{x}{m+a} + \frac{y}{m-a} = 1$$

oder:

$$(m+a)y + (m-a)x + a^2 - m^2 = o,$$

wo m eine Conſtante iſt, finden. — Hier iſt:

$$f'_a = y - x + 2a = o,$$

und wenn man a eliminirt; ſo erhält man für die Gleichung der Einhüllungscurve:

$$(x-y)^2 - 4m(x+y) + 4m^2 = o,$$

welche folglich eine Parabel ausdrückt.

§. 86.

Wenn die eingehüllten Curven durch eine Gleichung:

$$f(x, y, a, b) = o \quad (6)$$

mit zwei veränderlichen Parametern a, b, welche der Relation:

$$\varphi(a, b) = o \quad (7)$$

genügen müſſen, ausgedrückt werden, und man eliminirt b; ſo kommt man wieder auf den erſten Fall. Allein dieſe Elimination

ist nicht nothwendig; denn wenn $b+k$ der Werth von b ist, welcher dem Werthe $a+h$ von a entspricht; so wird der Ort der Punkte M' ausgedrückt durch:

$$f(x, y, a, b) = o, \quad f(x, y, a+h, b+k) = o,$$
$$\varphi(a, b) = o, \quad \varphi(a+h, b+k) = o.$$

Setzt man Gr. $\frac{k}{h} = B'$ und geht zu der Grenze über (Anhang, Formel 33); so erhält man die Einhüllungscurve, wenn man mit den Gleichungen (6) und (7) die zwei Gleichungen:

$$f'_a + f'_b \cdot B' = o, \quad \varphi'_a + \varphi'_b \cdot B' = o, \qquad (8)$$

oder die eine Gleichung:

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} \qquad (9)$$

verbindet.

Beispiel 1. Welches ist die Einhüllungscurve einer Geraden von constanter Länge l, deren Endpunkte sich auf zwei rechtwinkligen Axen bewegen? — Es sei AB (Fig. 123) irgend eine der Lagen der Geraden, $OA = a$, $OB = b$; so ist die Gleichung derselben:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ oder } bx + ay - ab = o,$$

und:

$$a^2 + b^2 = l^2.$$

Man hat also:

$$f'_a + f'_b \cdot B' = y - b + (x - a) B' = o,$$
$$\varphi'_a + \varphi'_b \cdot B' = a + b B' = o.$$

Wird aus den beiden letzten Gleichungen B' eliminirt, so erhält man:

$$ax - by = a^2 - b^2,$$

und wenn man diese Gleichung mit der ersten verbindet:

$$x = \frac{a^3}{l^2}, \quad y = \frac{b^3}{l^2}; \text{ also } a^2 = x^{\frac{2}{3}} l^{\frac{4}{3}}, \quad b^2 = y^{\frac{2}{3}} l^{\frac{4}{3}};$$

folglich, wenn diese Werthe von a^2, b^2 in die zweite Gleichung gesetzt werden:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

oder:

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 - 27 l^2 x^2 y^2 = o$$

als die gesuchte Gleichung.

Es läßt sich auch der einer besondern Lage AB der Geraden entsprechende Punkt M der Einhüllungscurve leicht finden. Con-

ſtruirt man nämlich das Rechteck BOAI und fällt aus I das Perpendikel IM auf AB; ſo iſt M der geſuchte Punkt. Denn es iſt:

$$AM = \frac{b^2}{l}, \quad BM = \frac{a^2}{l},$$

und die ähnlichen Dreiecke MPA, BOA geben:

$$MP : b = \frac{b^2}{l} : l,$$

woraus folgt:

$$MP = y = \frac{b^3}{l^2},$$

und ebenſo ergibt ſich:

$$x = \frac{a^3}{l^2}.$$

Die Curve beſteht aus vier gleichen Zweigen (Fig. 124), und wenn die Gerade die Lage CO hat, ſo iſt nach der vorhergehenden Conſtruction C der entſprechende Punkt der Einhüllungscurve. Die beiden Zweige CD, CD_1 berühren folglich die Axe der x in C, und die beiden Zweige DC, DC_1 berühren die Axe der y in D.

Beiſpiel 2. Einhüllungscurve der Geraden $px+qy+1=o$, wenn p, q durch eine Gleichung des zweiten Grades:

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F = o$$

verbunden ſind.

Die Gleichung:

$$\frac{\varphi' p}{f' p} = \frac{\varphi' q}{f' q}$$

gibt hier:

$$\frac{2Ap + Bq + D}{x} = \frac{2Cq + Bp + E}{y} = \frac{Dp + Eq + 2F}{1}.$$

Aus dieſen beiden letzten Gleichungen, welche in Bezug auf p und q vom erſten Grade ſind, ergeben ſich für p, q Werthe von der Form:

$$p = \frac{\alpha x + \alpha' y + \alpha''}{\gamma x + \gamma' y + \gamma''}, \quad q = \frac{\beta x + \beta' y + \beta''}{\gamma x + \gamma' y + \gamma''},$$

welche, in die gegebene Relation ſubſtituirt, auf eine Gleichung führen, die in Bezug auf x und y vom zweiten Grade iſt. Die Einhüllungscurve iſt alſo vom zweiten Grade.

Uebungsaufgaben.

1) Die Gleichung der Umhüllungscurve der durch die Gleichung:

$$y = ax + r\sqrt{1+a^2},$$

worin a ein veränderlicher Parameter iſt, ausgedrückten Curven iſt:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

die Umhüllungscurve alſo ein Kreis.

2) Die Gleichung der Umhüllungscurve der Parabeln:

$$y^2 = a(x - a),$$

wo a einen veränderlichen Parameter bezeichnet, iſt:

$$y = \pm\frac{x}{2},$$

und drückt mithin zwei Gerade aus.

3) Die Gleichung der Umhüllungscurve der Ellipſen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1,$$

worin a einen veränderlichen Parameter bedeutet, iſt:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

4) Die Gleichung der Umhüllungscurve der Geraden:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

wo die Parameter a, b der Bedingung:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = 1$$

genügen müſſen, iſt:

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

d. h. die Gleichung einer auf zwei Tangenten als Axen bezogenen Parabel.

5) Die Gleichung der Umhüllungscurve der durch die Gleichung:

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2$$

ausgedrückten Kreiſe, wo a, b der Bedingung:

$$b^2 = 4ma$$

genügen müſſen, iſt:

$$y^2 = 4m(x + m),$$

welche mithin eine Parabel ausdrückt.

6) Die Gleichung der Umhüllungslinie der durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1$$

ausgedrückten Ellipſen iſt:

$$\pm \frac{x}{m} \pm \frac{y}{n} = 1,$$

welche vier Gerade ausdrückt.

§. 87.

Neues Coordinatenſyſtem.

Statt eine Curve durch die Coordinaten ihrer Punkte zu beſtimmen, kann man ſie auch durch ihre Tangenten beſtimmen. Die Lage einer Geraden $px + qy + 1 = o$ wird durch die beiden Größen p, q beſtimmt, und eine Gleichung $F(p, q) = o$ zwiſchen dieſen beiden Größen drückt eine ſtetige Reihe von Geraden, d. h. die Einhüllungscurve aus. — Wir haben vorhin geſehen, daß, wenn dieſe Gleichung vom zweiten Grade iſt, die durch ſie ausgedrückte Curve in Beziehung auf x, y auch vom zweiten Grade iſt; und umgekehrt wird die Berührungsbedingung zwiſchen einer Geraden und einer Curve des zweiten Grades durch eine Gleichung des zweiten Grades nach p und q ausgedrückt. — Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit p und q drückt alſo dieſelben Curven aus, als die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit x und y.

Es ſeien $f(x, y) = o$ und $F(p, q) = o$ die Gleichungen derſelben Curve in beiden Coordinatenſyſtemen, ſo haben wir bereits die Aufgabe gelöſ't: die Tangente (p, q) in einem Punkte (x, y) der Curve zu finden, und die Relationen erhalten:

$$\frac{p}{f'_x} = \frac{q}{f'_y} = \frac{-1}{x f'_x + y f'_y} = \frac{1}{\varphi + 2\chi + \ldots}. \qquad (10)$$

Dieſer Aufgabe entſpricht in dem neuen Coordinatenſyſteme die andere: den auf der Tangente (p, q) liegenden Punkt (x, y) der Curve zu beſtimmen, und vermöge der Gleichung (9) hat man die Relationen von derſelben Form:

$$\frac{y}{F'_p} = \frac{y}{F'_q} = \frac{-1}{p F'_p + q F'_q} = \frac{1}{\Phi + 2X + \ldots}.$$

Die beiden Größen p und q, welche die Lage jeder Tangente beſtimmen, werden Tangentialcoordinaten genannt. — Eine Gleichung des erſten Grades $Ap + Bq + 1 = o$ mit Tangentialcoordinaten drückt einen Punkt aus, deſſen Liniencoordinaten $x = A$, $y = B$ ſind; denn die bewegliche Gerade, deren Gleichung

in geradlinigen Coordinaten $px + qy + 1 = o$ iſt, geht ſtets durch dieſen Punkt, und die Umhüllungscurve reducirt ſich auf einen Punkt.

Ein Syſtem zweier Gleichungen des erſten Grades mit Tangentialcoordinaten drückt eine Gerade aus; denn wenn man die beiden Gleichungen für p und q auflöſ't, ſo erhält man zwei beſtimmte Werthe $p = \alpha$, $q = \beta$, welches die Coordinaten einer Geraden ſind.

Im Allgemeinen, die gemeinſchaftlichen Auflöſungen zweier Gleichungen mit Tangentialcoordinaten geben die der Tangenten der Umhüllungscurven, welche zuſammenfallen.

Um von der Gleichung einer Curve $F(p, q) = o$ in Tangentialcoordinaten zu der Gleichung $f(x, y) = o$ derſelben Curve in geradlinigen Coordinaten überzugehen, muß man p, q zwiſchen den drei Gleichungen:

$$F(p, q) = o, \quad \frac{x}{F'_p} = \frac{y}{F'_q}, \quad px + qy + 1 = o$$

elimiriren, wodurch ſich ergibt:

$$\frac{x}{F'_p} = \frac{y}{F'_q} = \frac{-1}{pF'_p + qF'_q}.$$

Wenn die Funktion $F(p, q)$ vom m^{ten} Grade iſt in Beziehung auf p und q, ſo iſt die Funktion $pF'_p + qF'_q$ auch vom m^{ten} Grade, kann aber mittelſt der Gleichung $F(p, q) = o$ auf den $(m-1)^{ten}$ Grad gebracht werden.

Dieſes neue Coordinatenſyſtem iſt von Plücker und Chasles eingeführt.

Beiſpiel. Wenn vier Punkte A und A', B und B' gegeben ſind, die Umhüllungscurve der Geraden zu finden, welche ſo beſchaffen ſind, daß das Produkt der Abſtände einer jeden von den beiden Punkten A, A' zu dem Produkte der Abſtände derſelben Geraden von den beiden andern Punkten B, B' in einem conſtanten Verhältniſſe ſteht.

Die Gleichung der Umhüllungscurve iſt in Tangentialcoordinaten vom zweiten Grade, und mithin iſt die Curve auch vom zweiten Grade. Wenn der Abſtand der Tangente vom Punkte A Null iſt, ſo iſt der vom Punkte B oder B' auch Null. Die Curve berührt alſo die beiden Geraden AB, AB' und ebenſo die beiden Geraden A'B, A'B', d. h. ſie iſt in das Viereck ABA'B' beſchrieben.

Neuntes Kapitel.

Von der Krümmung und den Evoluten der Curven.

§. 88.

Es sei MM' (Fig. 125) irgend eine Curve und MT die Tangente in M. Läßt man diese Tangente auf der Curve fortrollen, so ist der Winkel ω, welchen sie in irgend einer Lage mit ihrer anfänglichen Lage bildet, eine Funktion des von dem Berührungspunkte durchlaufenen Bogens s. Der Winkel ω wird die Biegung des Bogens s genannt. — Im Kreise von einem beliebigen Halbmesser r ist $\omega = \frac{s}{r}$, d. h. die Biegung ist dem Bogen proportional, und die Biegung eines der Längeneinheit gleichen Bogens oder das Verhältniß der Biegung eines Kreisbogens zu seiner Länge wird die Krümmung des Kreises genannt, und folglich durch $\frac{1}{r}$, d. h. durch den reciproken Werth seines Halbmessers ausgedrückt.

Wenn die Curve kein Kreis ist, so ist das Verhältniß $\frac{\omega}{s}$ nicht mehr constant, und drückt für einen gewissen Bogen s nur die mittlere Krümmung, d. h. die gleichförmige Krümmung aus, welche der Bogen haben müßte, damit seine Biegung $= \omega$ würde. — Läßt man aber s unendlich abnehmen, so drückt Gr. $\frac{\omega}{s}$ die Krümmung der Curve im Punkte M aus. — Wenn man auf der Normale, und zwar auf der concaven Seite der Curve, eine Länge $MO = r$ von solcher Beschaffenheit nimmt, daß $\frac{1}{r} = \text{Gr.}\frac{\omega}{s}$ ist, und aus dem Punkte O mit dem Halbmesser r einen Kreis beschreibt; so hat dieser Kreis dieselbe Krümmung, als die Curve im Punkte M, und wird deshalb der Krümmungskreis, so wie sein Mittelpunkt O der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M der Curve genannt.

§. 89.

Bestimmung des Krümmungskreises.

Das Verhältniß eines Curvenbogens zu seiner Sehne hat die Einheit zur Grenze, wenn dieser Bogen unendlich abnimmt. — Wenn der Bogen MM′ (Fig. 125) hinreichend klein ist, damit er seine Convexität stets nach derselben Seite kehrt; so ist derselbe länger als die Sehne MM′ und kürzer als die Summe der beiden Tangenten MT_1M'. Fällt man von T_1 auf die Sehne das Perpendikel T_1D und bezeichnet die Winkel T_1MM', $T_1M'M$ resp. mit μ, μ', so hat man:

$$\frac{MD}{MT_1} = \cos\mu, \quad \frac{M'D}{M'T_1} = \cos\mu',$$

und der Bruch:

$$\frac{MD + M'D}{MT_1 + M'T_1} = \frac{MM'}{MT_1 M'}$$

liegt nach einem bekannten algebraischen Satze zwischen $\cos\mu$ und $\cos\mu'$, und da die Winkel μ, μ' zugleich mit s gegen Null, also $\cos\mu$, $\cos\mu'$ gegen die Einheit convergiren; so hat der letzte Bruch die Einheit zur Grenze. Nun ist aber:

$$MT_1M' > s > MM' \text{ also } 1 > \frac{MM'}{s} > \frac{MM'}{MT_1M'},$$

und endlich:

$$\text{Gr.}\ \frac{MM'}{s} = 1.$$

Der Krümmungsmittelpunkt ist nichts anders, als die Grenzlage des Durchschnittspunktes zweier benachbarter Normalen. — Denn es sei O der Durchschnittspunkt der Normalen in M und M′, und um OT_1 als Durchmesser werde ein Kreis beschrieben, so geht derselbe durch M und M′. Bezeichnet ferner D den Durchmesser dieses Kreises und s' den Bogen MM′ desselben, so ist:

$$\angle MOM' = \omega = \frac{s'}{D} \text{ und } \frac{1}{D} = \frac{\omega}{s'};$$

aber auch:

$$\frac{\omega}{s'} = \frac{\omega}{s} \cdot \frac{s}{s'} \text{ und } \frac{s}{s'} = \frac{s}{MM'} \cdot \frac{MM'}{s'};$$

folglich:

$$\text{Gr.}\ \frac{s}{s'} = 1 \text{ und Gr.}\ \frac{\omega}{s'} = \text{Gr.}\ \frac{\omega}{s} = \frac{1}{r}, \text{ also Gr. } D = r.$$

Die Grenze von T_1O oder MO ist also $= r$, und mithin die Grenze des Durchschnittspunktes zweier benachbarter Normalen der Krümmungsmittelpunkt. — Hieraus folgt: daß der Ort der Krümmungsmittelpunkte nichts anders ist, als der Ort der Durchschnittspunkte der successiven Normalen oder die Einhüllungscurve der letztern.

Es sei:

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der Curve, so ist die Gleichung der Normale im Punkte (x, y):

$$(X - x) f'_y - (Y - y) f'_x = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung der Normale enthält zwei veränderliche Parameter x, y, welche der Gleichung (1) genügen müssen, und man erhält die Einhüllungscurve, wenn man mit den beiden letzten Gleichungen noch die folgende:

$$\frac{(X-x)f''_{xy} - (Y-y)f''_{x^2} - f'_y}{f'_x} = \frac{(X-x)f''_{y^2} - (Y-y)f''_{xy} + f'_x}{f'_y}$$

oder:

$$(X-x)(f'_y f''_{xy} - f'_x f''_{y^2}) - (Y-y) f'_y f''_{x^2} - f'_x f''_{xy}) = f'^2_x + f'^2_y \qquad (3)$$

verbindet, woraus sich ergibt:

$$\frac{X-x}{f'_x} = \frac{Y-y}{f'_y} = -\frac{f'^2_x + f'^2_y}{f'^2_y f''_{x^2} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{y^2}} = \frac{\pm r}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}. \qquad (4)$$

Diese Gleichungen (4) geben den Krümmungshalbmesser r und die Coordinaten X, Y des Krümmungsmittelpunktes. — Wenn man x, y zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3) eliminirt, so erhält man die Gleichung der Einhüllungscurve der Normalen.

Beispiel 1. Für die Ellipse hat man:

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0,$$

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}} = -\frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}{\frac{x^2}{a^4 b^2} + \frac{y^2}{b^4 a^2}} = \frac{\pm r}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}},$$

$$a^2\left(\frac{X}{x}-1\right)-b^2\left(\frac{Y}{y}-1\right)=-\left(b^2\frac{x^2}{a^2}+a^2\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$=-a^2+(a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}=-b^2-(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2},$$

$$a^2\frac{X}{x}=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2,\ b^2\frac{Y}{y}=-\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2,$$

woraus folgt, wenn man $\frac{a^2-b^2}{a}=c$ und $\frac{a^2-b^2}{b}=d$ ſetzt:

$$\frac{X}{c}=\left(\frac{x}{a}\right)^3,\ \frac{Y}{d}=\left(\frac{y}{b}\right)^3,$$

und der Ort der Krümmungsmittelpunkte, welcher in Fig. 126 dargeſtellt iſt, wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\left(\frac{X}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{Y}{d}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Ferner iſt:

$$r=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^2+b^2-(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$=\frac{(a^4-(a^2-b^2)x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}.$$

Von A bis B nimmt r zu, und folglich die Krümmung ab.

Beiſpiel 2. Für die Hyperbel iſt:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0,$$

und wenn man ſetzt:

$$\frac{a^2+b^2}{a}=c,\ \frac{a^2+b^2}{b}=d,$$

ſo wird der in Fig. 127 dargeſtellte Ort der Krümmungsmittelpunkte durch die Gleichung:

$$\left(\frac{X}{c}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{Y}{d}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

ausgedrückt, und für den Krümmungshalbmeſſer hat man:

$$r=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(b^2-a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Wenn ſich der Punkt M auf dem Curvenzweige AH immer weiter von A entfernt, ſo convergirt r gegen ∞, und folglich die Krümmung gegen Null.

Beiſpiel 3. Für die Parabel hat man:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(y^2-2px)=0,$$

$$\frac{X-x}{-p} = \frac{Y-y}{y} = -\frac{p^2+y^2}{p^2} = -\frac{p+2x}{p} = \frac{\pm r}{\sqrt{p^2+y^2}},$$

$$x = \frac{X-p}{3},\ y = -p^{\frac{2}{3}}\ Y^{\frac{1}{3}},\ r = \frac{(p^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}{p^2}.$$

Der Ort der Krümmungsmittelpunkte (Fig. 128) hat zur Gleichung:

$$p\,Y^2 = \frac{8}{27}\,(X-p)^3,$$

und wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt C verlegt wird, wo die Curve die Axe der x schneidet:

$$p\,Y^2 = \frac{8}{27}\,X^3.$$

Uebungsaufgaben.

1) Für die auf ihre Asymptoten als Axen bezogene Hyperbel:

$$xy = m^2$$

ist die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte:

$$(X+Y)^{\frac{2}{3}} - (X-Y)^{\frac{2}{3}} = (4m)^{\frac{2}{3}},$$

und der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2m^4}.$$

2) Für die halbkubische Parabel:

$$3ay^2 = x^3$$

ist die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte:

$$81\,XY^2 = 16\left(2a \pm (a^2-6aX)^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(\pm a^2 - 6aX\right)^{\frac{1}{2}} - a),$$

und der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{(2a+3x)^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3a}}.$$

3) Für die Hypocycloide:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte:

$$(X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}},$$

und der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = 3\,(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

4) Für die Cycloide:

$$y = r.\,\text{arc sin vers.}\,\frac{x}{r} + \sqrt{2rx - x^2}$$

iſt die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte:

$$Y = r\,\text{arc sin vers.}\left(\frac{4r - X}{r}\right) - \sqrt{2r(4r-X) - (4r-X)^2},$$

welche eine der erſten gleiche Cycloide ausdrückt, und der Krümmungshalbmeſſer:

$$\rho = -2x\sqrt{27x\,(27-x)}.$$

§. 90.

Durch einen nicht auf der Curve liegenden Punkt gehende Normalen zu ziehen.

Wenn x, y die Coordinaten des Fußpunktes der Normale und x_1, y_1 die des gegebenen Punktes bezeichnen, ſo müſſen letztere der Gleichung (2) genügen, und man hat folglich die Gleichung:

$$(x_1 - x)\,f'_y - (y_1 - y)\,f'_x = 0. \qquad (5)$$

Die ſimultanen Gleichungen (1) und (5) beſtimmen die Fußpunkte der geſuchten Normalen, und da beide vom m^{ten} Grade ſind; ſo folgt: daß man im Allgemeinen durch einen gegebenen Punkt an eine Curve des m^{ten} Grades m^2 Normalen ziehen kann.

Da die Normalen der gegebenen Curve Tangenten der Einhüllungscurve ſind, ſo läuft die in Rede ſtehende Aufgabe darauf hinaus: durch einen gegebenen Punkt Tangenten an die zweite Curve zu ziehen. Wenn der gegebene Punkt P in der Nähe der converen Seite eines Curvenzweiges liegt, ſo kann man zwei Tangenten an denſelben ziehen, und die Endgleichung hat zwei gleiche Wurzeln (ſie kann zwar noch andere Wurzeln haben, allein dieſe entſprechen Tangenten, deren Berührungspunkte nicht in der Nähe von P liegen). Wenn ſich der Punkt P der Einſchließungscurve nähert, ſo nähern ſich die beiden Wurzeln der Gleichheit, und wenn der Punkt P auf die Einhüllungscurve fällt; ſo ſind ſie einander gleich. Tritt endlich der Punkt P auf die concave Seite derſelben Curve, ſo exiſtiren die beiden Tangenten nicht mehr und die beiden Wurzeln der Endgleichung werden imaginär.

Beiſpiel. Die gegebene Curve ſei eine Ellipſe (Fig. 126), und wir wollen den Punkt P zunächſt innerhalb der Einhül-

lungscurve annehmen. Eine Tangente, welche auf dem Zweige CD fortrollt, geht zweimal durch den Punkt P, und wenn sie auf DC_1 oder CD_1 fortrollt; so geht sie nur einmal durch den Punkt P. Man kann also von P aus vier Tangenten an die Einhüllungscurve, und folglich vier Normalen an die Ellipse ziehen. — Wenn der Punkt P auf der Einhüllungscurve liegt, so gibt es nur drei Normalen, und wenn er endlich außerhalb derselben liegt; so gibt es nur zwei Normalen.

Bei der Hyperbel finden dieselben Eigenschaften statt; und an die Parabel kann man drei, zwei, oder nur eine Normale ziehen, jenachdem der Punkt P innerhalb, auf, oder außerhalb der Einhüllungscurve liegt. Bei der Parabel ist übrigens die sich durch Elimination von x zwischen (1) und (5) ergebende Endgleichung:

$$y^3 - 2p(x_1 - p)y - 2p^2y_1 = o,$$

und die Bedingung der Realität ihrer Wurzeln:

$$py_1^2 - \frac{8}{27}(x_1 - p)^3 < o$$

führt auf dieselben Folgerungen.

§. 91.

Evoluten.

Es seien MM_1 und $M'M'_1$ (Fig. 129) zwei benachbarte Normalen, und aus ihrem Durchschnittspunkte O werde mit dem Halbmesser OM ein Kreisbogen beschrieben, welcher OM in I schneidet; so ist:

$$\text{Gr.}\ \frac{IM'}{\text{Bog. } MM'} = o,$$

wenn der Punkt M' sich M unendlich nähert. Denn das Dreieck MIM' gibt:

$$\frac{IM'}{MM'} = \frac{\sin M'MI}{\sin MIM'};$$

es ist aber:

$$\frac{IM'}{s} = \frac{IM'}{MM'} \cdot \frac{MM'}{s}, \text{ also } \frac{IM'}{s} = \frac{MM'}{s} \cdot \frac{\sin M'MI}{\sin MIM'}.$$

Wenn M' sich M unendlich nähert, so werden MI und MM' Tangenten in M; folglich ist Gr. $M'MI = o$ und Gr. $MIM' = \frac{\pi}{2}$, also Gr. $\frac{\sin M'MI}{\sin MIM'} = o$ und endlich Gr. $\frac{IM'}{s} = o$.

Es seien ferner M_1, M'_1 die den Punkten M, M' entsprechenden Krümmungsmittelpunkte, so ist:

$$\text{Gr.}\ \frac{M'_1M' - M_1M}{\text{Bog. } M_1M'_1} = 1.$$

Denn es ist:

$$M'_1M' - M_1M = M_1O + OM'_1 - IM' = M_1OM'_1 - IM',$$

$$\frac{M'_1M' - M_1M}{s_1} = \frac{M_1OM'_1}{s_1} - \frac{IM'}{s} \cdot \frac{s}{s_1},$$

$$\text{Gr.}\ \frac{M_1OM'_1}{s_1} = 1,\ \text{Gr.}\ \frac{IM'}{s} = 0,$$

und wegen $\frac{s}{s_1} = \frac{\omega}{s_1} : \frac{\omega}{s}$ ist: $\text{Gr.}\ \frac{s}{s_1} = \frac{r}{r_1}$, wo r, r_1 die Krümmungshalbmesser der beiden Curven in den Punkten M und M_1 und s, s' die einander entsprechenden Bogen derselben bezeichnen. Das Verhältniß $\frac{r}{r_1}$, hat aber im Allgemeinen einen endlichen Werth; folglich ist $\text{Gr.}\ \frac{IM'}{s} \cdot \frac{s}{s_1} = 0$, und mithin die gesuchte Grenze $= 1$.

Aus dem Vorhergehenden folgt weiter: daß die Differenz $M_1M - N_1N$ zwischen zwei beliebigen Krümmungshalbmessern dem Bogen M_1N_1 der Einhüllungscurve gleich ist, welcher zwischen den beiden entsprechenden Krümmungsmittelpunkten M_1 und N_1 liegt.

Denn es seien $M'_1, M''_1, \ldots$ eine große Anzahl zwischen M_1 und N_1 liegender Punkte der Einhüllungscurve, $M'_1M', M''_1M'', \ldots$ die entsprechenden Tangenten oder Normalen, ferner die successiven Differenzen $M'_1M' - M_1M, M''_1M'' - M'_1M', \ldots$ resp. gleich $\delta, \delta', \ldots$, die Bogen $M_1M'_1, M'_1M''_1, \ldots$ resp. gleich $s_1, s'_1, \ldots$, die Differenz $N_1N - M_1M = \triangle$ und der ganze Bogen $M_1N_1 = S_1$; so ist:

$$\frac{\triangle}{S_1} = \frac{\delta + \delta' + \delta'' + \ldots}{s_1 + s'_1 + s''_1 + \ldots}$$

eine Mittelgröße zwischen den einzelnen Brüchen $\frac{\delta}{s_1}, \frac{\delta'}{s'_1}, \frac{\delta''}{s''_1}, \ldots$. Wird nun die Anzahl der Zwischenpunkte $M'_1, M''_1, \ldots$ unendlich groß, so ist die Grenze jedes einzelnen Bruches $= 1$, folglich auch:

$$\frac{\triangle}{S_1} = 1, \text{ also } \triangle = S.$$

Abwickelung einer Curve nennt man die Bestimmung der geradlinigen Länge des Bogens derselben; und nach dem vorhergehenden Satze wird also der Bogen M_1N_1 der Einhüllungscurve oder des Ortes der Krümmungsmittelpunkte durch die Differenz der den Endpunkten M_1, N_1 entsprechenden beiden Krümmungshalbmesser N_1N und M_1M abgewickelt ausgedrückt, weshalb dieser Ort die Evolute (Abgewickelte) und die gegebene Curve die Evolvente (Abwickelnde) genannt wird.

Denkt man sich in A_1 einen vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Faden befestigt, welcher bis zu dem Punkte M_1 auf die Evolute gewickelt und dann geradlinig nach der Tangente M_1M gespannt ist, befestigt in M einen Stift, und wickelt den stets gleich stark gespannten Faden wieder ab; so beschreibt der Stift offenbar die Curve MM' . . . A. Denn wenn z. B. der Berührungspunkt nach N_1 gelangt ist, so hat der gerade Theil des Fadens um die Länge des Bogens M_1N_1 zugenommen, ist also $= N_1N$ geworden, und folglich befindet sich der Stift in N.

Wenn der Stift in irgend einem andern Punkte P des Fadens befestigt wird, so beschreibt derselbe eine andere Curve PP'P''..., welche ebenfalls als Evolvente der gegebenen Curve M_1N_1A betrachtet werden kann, weil nach der Erzeugungsart dieser zweiten Curve der Bogen $M_1N_1 = N_1Q - M_1P$ ist. Derselben Curve können also unendlich viele Evolventen entsprechen, deren gemeinschaftliche Normalen die Tangenten der Evolute sind. Der zwischen zwei Evolventen liegende Theil dieser Normalen ist constant, und die Evolute ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für sämmtliche Evolventen.

Es sei $f(x, y) = o$ die Gleichung einer Evolvente (M), ferner x, y die Coordinaten des Punktes M, X, Y die des Punktes P und k der constante Abstand MP; so hat man:

$$\frac{X-x}{f'_x} = \frac{Y-y}{f'_y} = \frac{k}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}.$$

Eliminirt man x, y zwischen diesen drei Gleichungen, so erhält man eine Gleichung mit X_1Y, welche irgend eine der Evolventen ausdrückt, weil k ein willkürlicher Parameter ist.

Zehntes Kapitel.

Von den Mittelpunkten.

§. 92.

Ein Punkt heißt Mittelpunkt einer Curve, wenn jede durch denſelben gehende Gerade die Curve in Punkten ſchneidet, welche paarweiſe von dieſem Punkte gleichweit entfernt ſind und auf entgegengeſetzten Seiten deſſelben liegen (§. 41). — Eine durch den Mittelpunkt einer Curve gehende Gerade ſchneidet alſo dieſe Curve in einer geraden Anzahl von Punkten, wofern der Mittelpunkt nicht ſelbſt ein Punkt der Curve iſt.

1) Wenn eine Curve zwei Mittelpunkte hat, ſo hat ſie deren auch unendlich viele, welche auf derſelben Geraden in gleichen gegenſeitigen Abſtänden liegen.

Es ſeien O und O′ (Fig. 130) die beiden Mittelpunkte; man verlängere OO′ und nehme O′O″ = OO′. Wenn alsdann M ein Punkt der Curve iſt, und man nimmt O′M′ = O′M, ſo iſt M′ ein zweiter Punkt der Curve. Ebenſo beſtimmt man einen dritten Punkt M″ der Curve auf M′O, dann einen vierten M‴ auf M″O′. Nun ſind aber die Dreiecke MO′M‴, M′O′M″ einander gleich; alſo geht die Gerade MM‴ durch den Punkt O″, und es iſt O″M = O″M‴; folglich auch der Punkt O″ ein Mittelpunkt. Ebenſo wie wir eben aus der Exiſtenz zweier Mittelpunkte O,O′ die eines dritten O″ abgeleitet haben, kann man aus O′ und O″ einen vierten O‴ ableiten, u. ſ. f.

Eine algebraiſche Curve kann nur einen Mittelpunkt haben. — Denn wenn ſie deren zwei hätte, ſo hätte ſie unendlich viele in derſelben Geraden liegende Mittelpunkte, und würde von einer zu der Mittelpunktslinie parallelen Geraden in unendlich vielen Punkten geſchnitten, was unmöglich iſt. Läßt ſich aber der erſte Theil der Gleichung in lineare Factoren zerlegen, welche gleich Null geſetzt, Gerade geben, die zu derſelben Geraden parallel und paarweiſe gleichweit davon entfernt ſind; ſo ſind alle Punkte jener Geraden Mittelpunkte in Bezug auf die Syſteme der Parallelen.

2) Wenn eine Curve drei nicht in gerader Linie liegende Mittelpunkte hat, so hat sie deren unendlich viele, welche in den Durchschnittspunkten zweier Systeme gleichweit von einander abstehender Parallelen liegen.

Es seien O, O′, O″ (Fig. 131) die drei gegebenen Mittelpunkte, so ist die vierte Winkelspitze O‴ des Parallelogrammes OO′O‴O″ ebenfalls ein Mittelpunkt. Denn nimmt man O‴O, O‴O″ als Coordinatenaxen, bezeichnet die Längen O‴O, O‴O″ resp. mit a, b und die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Curve mit x, y; so kann man mit Hülfe der Mittelpunkte O, O′, O″ successive andere Punkte M′, M″, M‴ der Curve bestimmen, deren Coordinaten nach §. 36 sind:

$$2a - x, - y;\ x, 2b + y;\ - x, - y$$

Der Punkt O‴ ist also die Mitte der Geraden MM‴, und folglich O‴ Mittelpunkt der Curve. Nimmt man ferner auf O‴O und O‴O″ Längen, welche resp. gleich b und a sind, so liegen nach dem ersten Satze auf jeder dieser beiden Linien unendlich viele Mittelpunkte, und wenn man durch die so erhaltenen Punkte Parallelen zu O‴O, O‴O″ zieht: so ist jeder Durchschnittspunkt Winkelspitze eines Parallelogrammes, dessen drei andere Winkelspitzen bereits Mittelpunkte sind, folglich auch die vierte.

§. 93.

Anfangspunkt als Mittelpunkt.

Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten Mittelpunkt der Curve:

$$f(x, y) = o \qquad (1)$$

ist, und x, y sind die Coordinaten eines Punktes M der Curve; so sind — x, — y die Coordinaten des entsprechenden Punktes M′ der Curve, und folglich ist:

$$f(- x, - y) = o. \qquad (2)$$

Umgekehrt, wenn die Gleichungen (1) und (2) zugleich stattfinden, d. h. wenn die Werthe x, y und — x, — y der Gleichung der Curve gleichzeitig genügen; so liegen die Punkte (x, y), (— x, — y) mit O in gerader Linie und in gleichen Abständen von O, und folglich ist O ein Mittelpunkt.

Wenn $f(x, y)$ eine ganze algebraiſche Funktion iſt, deren Glieder alle von demſelben Grade (derſelben Dimenſion) ſind, ſo ſind die Gleichungen (1) und (2) identiſch, dieſer Grad mag eine gerade, oder eine ungerade Zahl ſein, und der Anfangspunkt der Coordinaten iſt zuverläſſig Mittelpunkt der Curve. — Die Gleichungen (5), (6) und (7) in §. 7 haben dieſe Eigenſchaft, und folglich haben die drei entſprechenden Curven: *Ellipſe*, Hyperbel und Lemniscate (Fig. 8, 9, 9a) den Anfangspunkt der Coordinaten zum Mittelpunkte. — Bei der Ellipſe und Hyperbel, ſo wie bei der Curve $(y^2+x^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=a^4-c^4$ (§. 43, Fig. 56—59) iſt der Anfangspunkt der Coordinaten. Mittelpunkt, und eine durch denſelben gehende Gerade ſchneidet die Curve in zwei, oder in vier Punkten, welche paarweiſe gleichweit davon entfernt ſind. — Die Curve $y^2-x^2y^2+x^4=0$ hat den Anfangspunkt ebenfalls zum Mittelpunkte, welcher zur Curve gehört, aber nur als iſolirter Punkt. — Die erſte der binomiſchen Gleichungen (§. 41) hat nur Glieder von einem ungeraden Grade, und der Anfangspunkt iſt Mittelpunkt der Curve, welche zugleich durch denſelben geht. — Wenn alle Glieder der Gleichung der Curve von einem ungeraden Grade ſind, ſo geht ein Curvenzweig immer durch den Mittelpunkt; denn es läßt ſich leicht zeigen: daß in dieſem Falle der Mittelpunkt kein iſolirter Punkt ſein kann.

Wenn nicht alle Glieder der Gleichung von einerlei Dimenſion ſind, ſo kann man daraus noch nicht ſchließen: daß der Anfangspunkt kein Mittelpunkt iſt. — Wenn man weiß: daß ſich das Polynom $f(x, y)$ nicht in ganze Factoren zerlegen läßt, ſo können die beiden Gleichungen (1), (2) nur dann denſelben Ort ausdrücken, wenn ſie identiſch ſind (§. 16), und es müſſen nothwendig alle Glieder von einerlei Dimenſion ſein. — Weiß man aber nicht gewiß: daß $f(x, y)$ unzerlegbar iſt, ſo muß man den größten gemeinſchaftlichen Diviſor von $f(x, y)$ und $f(-x, -y)$ ſuchen. Gibt es einen ſolchen Diviſor nicht, ſo iſt der Anfangspunkt kein Mittelpunkt; aber wenn es einen größten gemeinſchaftlichen Diviſor $\varphi(x, y)$ vom p^{ten} Grade gibt, ſo hat man:

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y),$$

und die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ drückt die Curve aus, welche den Anfangspunkt zum Mittelpunkt hat, während die Gleichung $\psi(x, y) = 0$ kein Syſtem reeller Auflöſungen geſtatten kann.

§. 94.

Beſtimmung des Mittelpunktes.

Hat man ſich überzeugt, daß der Anfangspunkt der Coordinaten kein Mittelpunkt iſt, ſo unterſucht man, ob ein anderer Punkt der Mittelpunkt der Curve iſt. Zu dem Zwecke verlegt man den Anfangspunkt in einen unbeſtimmten Punkt (a, b), indem die Richtung der Axen ungeändert bleibt, und unterſucht: ob es möglich iſt a und b ſo zu beſtimmen, daß die Gleichung:

$$f(a + x', b + y') = o$$

die vorhin angeführte Eigenſchaft hat: daß, wenn ihr durch x', y' genügt wird, daſſelbe mit $-x', -y'$ der Fall iſt.

Wenn die Gleichung eine algebraiſche und nicht zerlegbar iſt, ſo muß man alle Glieder aus derſelben fortzuſchaffen ſuchen, welche nicht von einem geraden Grade ſind, wenn die Gleichung von einem geraden Grade iſt, oder welche nicht von einem ungeraden Grade ſind, wenn die Gleichung von einem ungeraden Grade iſt. Iſt z. B. die Gleichung vom zweiten Grade, ſo muß man a, b ſo zu beſtimmen ſuchen, daß die Coefficienten der beiden Glieder vom erſten Grade verſchwinden, was im Allgemeinen immer möglich iſt. — Wenn aber die Gleichung von einem höhern, als vom zweiten Grade iſt, ſo iſt die Anzahl der $= o$ zu ſetzenden Coefficienten gewöhnlich größer als zwei, und die auf dieſe Weiſe erhaltenen Gleichungen können nur ſehr ſelten gleichzeitig beſtehen.

Beiſpiel 1. Für die Curven des zweiten Grades:

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ex + 1 = o \qquad (3)$$

hat man:

$$f(a+x', b+y') = f(a,b) + f'_a \cdot x' + f'_b \cdot y,$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}[f''_{a^2} \cdot x'^2 + 2 f''_{ab} \cdot x'y' + f''_{b^2} \cdot y'^2] = o,$$

und die Gleichungen, welche den Mittelpunkt beſtimmen, ſind folglich:

$$f'_a = o, \quad f'_b = o,$$

oder wenn man x und y reſp. für a und b ſetzt:

$$f'_b = 2Ax + By + D = o, \quad f'_y = 2Cy + Bx + E = o, \qquad (4)$$

woraus folgt:

$$x = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad y = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}. \qquad (5)$$

Wenn $B^2 - 4AC$ nicht $= o$ iſt, d. h. in dem Falle der Ellipſe und Hyperbel (§. 15), gibt es einen Mittelpunkt, und wenn $B^2 - 4AC = o$ iſt, d. h. in dem Falle der Parabel,

können die Gleichungen (4) nicht nebeneinander bestehen, und es gibt folglich keinen Mittelpunkt. — Wenn aber die Zähler und der Nenner der Brüche (5) gleichzeitig verschwinden, so reduciren sich die Gleichungen (4) auf eine einzige, und alle Punkte der durch diese eine Gleichung ausgedrückten Geraden sind Mittelpunkte. — Nimmt man diese Gerade zur Axe der x, so muß sich jede der Gleichungen (4) auf $y = o$ reduciren, und es ist folglich: $A = o$, $B = o$, $D = o$, $E = o$, so daß sich die Gleichung (3) auf $Cy^2 + 1 = o$ reducirt, folglich: $y = \pm \sqrt{-\frac{1}{C}}$ ist. Der Ort ist also ein System zweier Geraden, welche zu der Mittelpunktslinie parallel und gleichweit davon entfernt sind.

Beispiel 2. Es sei $y = \sin x$ (§. 51, Fig. 70), so ist der Anfangspunkt O ein Mittelpunkt, weil die Gleichung $-y = \sin(-x)$ mit der gegebenen identisch ist. — Untersuchen wir weiter, ob es noch andere Mittelpunkte gibt, so muß die Gleichung:

$$b + y' = \sin(a + x')$$

dieselben reellen Auflösungen haben, als die Gleichung:

$$b - y' = \sin(a - x').$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$b = \sin a \cos x',$$

und da diese letzte Gleichung für unendlich viele Werthe von x' stattfinden muß, so muß $b = o$, $\sin a = o$ oder $a = k\pi$ sein. Die Curve hat also auf der Axe der x in gleichen Intervallen $= \pi$ unendlich viele Mittelpunkte O, I, O', I', . . .

Beispiel 3. Es sei die Gleichung der Curve:

$$\cos x + \cos y = m,$$

wo $2 > m > 1$ ist; so muß man die beiden Gleichungen haben:

$$\cos(a + x') + \cos(b + y') = m,$$
$$\cos(a - x') + \cos(b - y') = m,$$

woraus sich durch Addition und Subtraction ergibt:

$$\cos a \cos x' + \cos b \cos y' = m,$$
$$\sin a \sin x' + \sin b \sin y' = o,$$

und wenn man y' eliminirt:

$$(\sin^2 a - \sin^2 b)\cos^2 x' + 2m \cos a \sin^2 b \cos x' - (\sin^2 a - \sin^2 b)\cos^2 b - m^2 \sin^2 b = o.$$

Da diese letzte Gleichung für unendlich viele Werthe von x' stattfinden muß, so muß man haben:

$$\sin^2 a - \sin^2 b = o, \quad \cos a \sin^2 b = o, \quad \sin^2 b = o,$$

woraus folgt:

$$\sin a = o, \sin b = o \text{ oder } a = k\pi, b = k'\pi.$$

Die Mittelpunkte werden alſo durch zwei Syſteme von Geraden beſtimmt, welche reſp. zu der Axe der x und zu der der y parallel und um 2π von einander entfernt ſind. (Fig. 72).

§. 95.

Eigenſchaften der Curven mit einem Mittelpunkte.

Es ſeien M, N zwei Punkte der Curve und M', N' die beiden entſprechenden Punkte, ſo ſind die beiden Dreiecke MON, M'ON' einander gleich; folglich die beiden Geraden MN, M'N' parallel und gleich weit vom Mittelpunkte entfernt. — Nähert ſich nun N dem Punkte M unendlich, ſo nähert ſich auch N' dem Punkte M' unendlich, und die beiden Geraden MN, M'N' werden an der Grenze reſp. Tangenten in M und M'. Die Tangenten in zwei correſpondirenden Punkten ſind alſo parallel und gleichweit vom Mittelpunkte entfernt.

Wenn eine Curve mit einem Mittelpunkte einen unendlichen Zweig hat, ſo hat ſie noch einen zweiten dem erſten correſpondirenden unendlichen Zweig. Wenn ſich ein Punkt M auf dem erſten Zweige ins Unendliche entfernt, ſo entfernt ſich der correſpondirende Punkt M' auf dem zweiten Zweige ebenfalls ins Unendliche, und die Tangenten in M und M' werden an der Grenze Aſymptoten. Zwei correſpondirende unendliche Zweige einer Curve mit einem Mittelpunkte haben folglich parallele und gleichweit von dem Mittelpunkte entfernte Aſymptoten. — Wenn die gegenſeitige Entfernung $=o$ iſt, ſo haben die beiden unendlichen Curvenzweige dieſelbe durch den Mittelpunkt gehende Aſymptote.

Wenn die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben iſt, ſo iſt der Pol ein Mittelpunkt, wenn dieſe Gleichung nicht geändert wird, indem man $\pi + \vartheta$ ſtatt ϑ ſetzt.

Elftes Kapitel.

Von den Durchmeſſern.

§. 96.

Wir wollen durch eine Curve eine Reihe Parallelen MM', $M_1M'_1$, . . . (Fig. 132) ziehen, und zunächſt annehmen, daß jede derſelben die Curve nur in zwei Punkten ſchneidet; ſo wird der Ort der Mittelpunkte $N, N_1, \ldots$ der verſchiedenen Sehnen ein Durchmeſſer der Curve genannt.

Wenn jede der Parallelen die Curve in mehr als zwei ſchneidet, ſo nimmt man die Mitten der gegenſeitigen Abſtände von je zwei Durchſchnittspunkten, und der ſo erhaltene Ort dieſer Mittelpunkte iſt der Durchmeſſer. — In Fig. 133 z. B. ſchneidet die Gerade MM' die Curve in vier Punkten, welche auf 6 Arten zu je zwei verbunden werden können. Der Durchmeſſer der Curve hat alſo auf der Parallele MM' ſechs Punkte, auf der Parallele $M_1M'_1$ nur einen und auf der Parallele $M_2M'_2$ gar keinen Punkt.

Die allgemeine Gleichung der Durchmeſſer einer Curve:

$$f(x, y) = 0$$

iſt von der Form:

$$F(x, y, a) = 0,$$

wo a den Richtungscoefficienten der parallelen Sehnen bedeutet, und dieſe Gleichung gibt für jeden Werth von a den zugehörigen Durchmeſſer.

§. 97.

Beſtimmung der Gleichung der Durchmeſſer.

Erſte Methode. — Es ſeien x, y und x', y' die Coordinaten der auf derſelben Sehne liegenden beiden Punkte M, M' (Fig. 132 a) der Curve, und x_1, y_1 die der Mitte N dieſer Sehne; ſo hat man:

$$f(x, y) = 0, \quad f'(x', y') = 0,$$

$$a = \frac{y' - y}{x' - x}, \quad x_1 = \frac{x + x'}{2}, \quad y_1 = \frac{y + y'}{2},$$

und die Elimination von x, y, x', y' zwiſchen dieſen fünf Gleichungen gibt die Gleichung:

$$F(x_1, y_1, a) = 0$$

des Durchmeſſers.

Zweite Methode. — Das System der parallelen Sehnen kann ausgedrückt werden durch:

$$y = ax + b, \qquad (2)$$

wo a eine Constante und b ein veränderlicher Parameter ist. Die Gleichung:

$$f(x, ax + b) = o \qquad (3)$$

gibt die Abscissen der Durchschnittspunkte der Curve mit einer der Parallelen, und wenn man die Gleichung:

$$F(x_1, a, b) = o \qquad (4)$$

bildet, deren Wurzeln die halben Summen aus je zwei der Wurzeln der Gleichung (3) sind; so sind die Wurzeln der Gleichung (4) die Abscissen der Mitten der betrachteten Parallelen, und die zugehörigen Ordinaten ergeben sich aus der Gleichung:

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Eliminirt man nun b, so erhält man die Gleichung:

$$F(x_1, a, y_1 - ax_1) = o$$

des Durchmessers.

Beispiel. — Die gegebene Curve sei:

$$y^2 - x^3 = o,$$

so hat man:

$$x^3 - (ax + b)^2 = o, \qquad (3)$$

$$8x^3_1 - 8a^2x^2_1 + (a^4 - 2ab)x_1 + 2a^3b + b^2 = o, \qquad (4)$$

und die Gleichung des Durchmessers ist:

$$8x_1^3 - 3a^2x_1^2 + y_1^2 - 6ax_1y_1 + 2a^3y_1 = o.$$

Für den besondern Werth $a = \infty$ ist die Gleichung des Durchmessers $y_1 = o$; folglich entspricht den zur Axe der y parallelen Sehnen die Axe der x als Durchmesser.

Dritte Methode. — Es seien α, β die constanten Winkel, welche die Richtung der Sehnen mit den Coordinatenaxen bildet, ϑ der Winkel dieser Axen, ϱ der Abstand einer Mitte N von dem Punkte M, wo ϱ positiv, oder negativ ist, jenachdem die Richtung NM mit der Richtung (α, β), oder mit der entgegengesetzten Richtung zusammenfällt, $p = \frac{\sin \beta}{\sin \vartheta}$, $q = \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta}$; so ist:

$$x = x_1 + p\varrho, \quad y = y_1 + q\varrho,$$

also:

$$f(x, y) = f(x_1 + p\varrho, y_1 + q\varrho) = o. \qquad (5)$$

Die reellen Wurzeln ϱ dieser Gleichung sind die Abstände des Punktes N von den Punkten, wo die Curve von der Parallele ge-

ſchnitten wird, und wenn der Punkt N die Mitte der Sehne ſein oder dem Durchmeſſer angehören ſoll; ſo müſſen zwei Wurzeln der Gleichung (5) einander gleich und entgegengeſetzt ſein. — Die Relation zwiſchen x_1, y_1, welche dieſe Bedingung ausdrückt, iſt die Gleichung des Durchmeſſers.

Dieſe Bedingungsgleichung erhält man, wenn man den erſten Theil der Gleichung (5) durch $\rho^2 - h$ dividirt, wo h eine unbeſtimmte Größe iſt, bis man auf einen Reſt vom erſten Grade:

$$P\rho + Q$$

kommt, und dann h zwiſchen den Gleichungen $P = o$, $Q = o$ eliminirt.

Beiſpiel. — Es ſei:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1 = o,$$

ſo iſt:

$$f(x_1 + p\rho, y_1 + q\rho) = f(x_1, y_1) + (f'x_1 \cdot p + f'y_1 \cdot q)\rho + H\rho^2 = o.$$

Soll nun dieſe Gleichung des zweiten Grades zwei gleiche und entgegengeſetzte Wurzeln haben, ſo muß der Coefficient des zweiten Gliedes Null ſein. Die Gleichung des Durchmeſſers iſt alſo, wenn man bemerkt: daß $\frac{q}{p} = a$ iſt:

$$f'x_1 + a f'y_1 = o.$$

Vierte Methode. — Die vorhergehende Methode kann auch folgendergeſtalt modificirt werden: Man verlegt den Anfangspunkt in die Mitte N, ſo wird die Gleichung der Curve:

$$f(x_1 + x', y_1 + y') = o,$$

und die der Sehne:

$$y' = ax'.$$

Die Abſciſſen der Durchſchnittspunkte der Sehne mit der Curve werden durch die Gleichung:

$$f(x_1 + x', y_1 + ax') = o$$

gegeben, und wenn der neue Anfangspunkt (x_1, y_1) die Mitte der Sehne ſein ſoll, ſo muß dieſe Gleichung zwei gleiche und entgegengeſetzte Wurzeln haben. — Die Gleichung, welche dieſe Bedingung ausdrückt, iſt alsdann die Gleichung des Durchmeſſers.

Beiſpiel. — Für die Curven des zweiten Grades hat man:

$$f(x_1 + x', y_1 + ax') = f(x_1, y_1) + (f'x_1 + f'y_1 \cdot a)x' + Hx'^2 = o,$$

und folglich iſt die Gleichung des Durchmeſſers:

$$f'x_1 + af'y_1 = (2A + Ba)x_1 + (2Ca + B)y_1 + D + Ea = o.$$

In den Curven des zweiten Grades ſind alſo alle Durchmeſſer gerade Linien.

Der durch die beiden ſimultanen Gleichungen:

$$f'_{x_1} = 0, \quad f'_{y_1} = 0$$

beſtimmte Punkt genügt der Gleichung des Durchmeſſers bei jedem Werthe von a, und folglich gehen alle Durchmeſſer durch den Mittelpunkt. — Es iſt übrigens a priori einleuchtend: daß in allen Curven, welche einen Mittelpunkt haben, dieſer Punkt jedem Durchmeſſer angehören muß. — Bezeichnet a_1 den Richtungscoefficienten des Durchmeſſers, ſo hat man:

$$a_1 = -\frac{Ba + 2A}{B + 2Ca} = -\frac{B}{2C} + \frac{B^2 - 4AC}{2C(2Ca+B)}.$$

In der Parabel iſt:

$$B^2 - 4AC = 0, \text{ folglich: } a_1 = -\frac{B}{2C}.$$

In dieſer Curve ſind mithin alle Durchmeſſer zu einander parallel.

Die vorhergehende Relation zwiſchen a und a_1 läßt ſich auf die folgende, mehr ſymmetriſche Form bringen:

$$2Caa_1 + B(a + a_1) + 2A = 0,$$

woraus erhellet: daß die durch a und a_1 beſtimmten Richtungen reciprok ſind, d. h. daß den zu der einen Richtung parallelen Sehnen eine zu der andern parallele Gerade als Durchmeſſer entſpricht, weshalb man dieſe Richtungen auch conjugirte genannt hat. — Aber in der Parabel hat dieſes Wort offenbar keine Bedeutung.

§. 98.

Wenn die Curve vom Grade m iſt, ſo iſt die Gleichung (3) im Allgemeinen auch vom Grade m, und die Gleichung (4) vom Grade $\frac{m(m-1)}{2}$, welches auch der Grad der Durchmeſſercurve iſt, alſo den Grad m überſteigt, ſobald $m > 3$ iſt. — Die Unterſuchung dieſes Durchmeſſers iſt alſo gewöhnlich ſchwieriger, als die der gegebenen Curve, und daher zur Erforſchung ihrer Eigenſchaften wenig geeignet. — Für gewiſſe beſondere Werthe von a kann jedoch der Grad des Durchmeſſers niedriger ausfallen.

Wenn eine der parallelen Sehnen eine Tangente der Curve iſt, ſo fallen die beiden Punkte M, M', und folglich die Mitte N zuſammen, und der Berührungspunkt iſt ein Punkt des Durchmeſſers.

Wenn jede Parallele die Curve in m Punkten ſchneidet, ſo hat

man nach §. 36 für den Ort des Mittelpunktes N der mittlern Entfernungen aller dieſer Punkte:

$$x_1 = \frac{x + x' + x'' + \ldots}{m},$$

wo $x, x', x'', \ldots$ die Abſciſſen der Durchſchnittspunkte oder die Wurzeln der Gleichung (3) bedeuten. — Wenn man in $f(x, y)$ die Glieder von einerlei Dimenſion immer in eins zuſammenfaßt, wie in §. 64; ſo wird die Gleichung (3):

$$x^m \varphi(1, a) + \left[\varphi'_a(1, a)b + \psi(1, a)\right] x^{m-1} + \ldots = 0,$$

woraus folgt:

$$mx_1 = -\frac{\varphi'_a \cdot b + \psi}{\varphi},$$

und wenn man $y_1 - ax_1$ ſtatt b ſetzt:

$$\varphi'_a \cdot y_1 + (m\varphi - a\varphi'_a)x_1 + \psi = 0.$$

Der Ort der Mittelpunkte der mittlern Entfernungen iſt alſo ſtets eine gerade Linie, welche in den Curven des zweiten Grades mit dem Durchmeſſer zuſammenfällt.

Die Eigenſchaften der Durchmeſſer hat man zuerſt im Kreiſe und dann in den Curven des zweiten Grades unterſucht. — Später hat man die Definition des Durchmeſſers verallgemeinern wollen, um ſie auf Curven von einem beliebigen Grade anwenden zu können; allein dieſe Verallgemeinerung iſt ſehr mangelhaft. — Statt die Mitte des Abſtandes zwiſchen je zwei Durchſchnittspunkten zu betrachten, wodurch die Sache complicirter wird, wäre es zweckmäßiger geweſen: den Ort des Mittelpunktes der mittlern Entfernungen der auf derſelben Sekante liegenden Durchſchnittspunkte Durchmeſſer zu nennen, ſo daß der Durchmeſſer immer eine gerade Linie wäre.

Zwölftes Kapitel.

Von den Axen.

§. 99.

Eine Gerade, welche eine Curve in zwei ſymmetriſche Theile theilt, heißt eine Axe derſelben, ſo daß die Punkte der Curve paarweiſe auf Perpendikeln dieſer Axe und zu beiden Seiten in gleichen Abſtänden liegen.

Wenn eine Curve zwei parallele Aren hat, so hat sie unendlich viele parallele und gleichweit von einander abstehende Aren. — Z. B. die Curve $y = \sin x$; denn wenn man den Anfangspunkt O nach G verlegt, so daß $OG = \frac{\pi}{2}$ ist (Fig. 70), so wird die Gleichung der Curve $y = \cos x$. Da sich diese Gleichung nicht ändert, wenn man $-x$ statt x setzt, so folgt, daß die Curve in Bezug auf die Parallele GH zur Axe der y symmetrisch ist. — Verlegt man weiter den Anfangspunkt in die Entfernung $OK = \frac{3\pi}{2}$, so wird die Gleichung der Curve $y = -\cos x$; folglich ist die Parallele KL auch eine Axe der Curve; u. s. f. Die Curve hat also unendlich viele parallele Aren, welche um die Länge π von einander abstehen.

Eine algebraische Curve kann keine zwei parallele Aren haben.

2) Wenn eine Curve zwei Aren OA, OA' (Fig. 130a) hat, welche sich in einem Punkte O schneiden und einen Winkel ϑ mit einander bilden, so hat sie eine Reihe von Aren, welche durch denselben Punkt O gehen und so beschaffen sind: daß zwei aufeinanderfolgende denselben Winkel ϑ mit einander bilden. Denn einem Punkte M der Curve entspricht in Bezug auf die Axe OA' ein symmetrischer Punkt M', und dem Punkte M' entspricht in Beziehung auf die Axe OA ein symmetrischer Punkt M'', sowie dem Punkte M'' in Bezug auf die Axe OA' ein symmetrischer Punkt M'''. — Dreht man nun den einen Theil der Ebene der Figur um die Axe OA' soweit, bis er mit dem andern Theile zusammenfällt; so fällt OA auf OA'', M' auf M, M'' auf M''', und da OA auf der Mitte von M'M'' senkrecht ist; so ist auch OA'' auf der Mitte von MM''' senkrecht. Es entspricht also jedem Punkte M der Curve in Beziehung auf OA'' ein symmetrischer Punkt M''', und mithin ist OA'' eine Axe der Curve.

So wie sich aus der Existenz zweier Aren OA, OA' die einer dritten Axe OA'' nachweisen läßt, ebenso ergibt sich aus der Existenz der beiden Aren OA', OA'' die der vierten Axe OA''', u. s. f.

Wenn das Verhältniß $\frac{\vartheta}{2\pi}$ commensurabel und dem nicht reducirbaren Bruche $\frac{m}{n}$ gleich ist, so ist die Anzahl der von dem

Punkte O ausgehenden Halbaren = n. Iſt daſſelbe Verhältniß *incommenſurabel*, ſo iſt die Anzahl der Aren *unendlich groß*.

§. 100.

Die Abſciſſenare als Are der Curve.

Wenn bei rechtwinkligen Coordinaten die Are der x eine Are der Curve:

$$f(x, y) = o \qquad (1)$$

iſt, ſo entſpricht jedem Punkte (x, y) der Curve ein *ſymmetriſch* liegender (x, — y), und es iſt folglich:

$$f(x, -y) = o. \qquad (2)$$

Umgekehrt, wenn die Gleichungen (1) und (2) *zu gleicher Zeit ſtattfinden, ſo iſt die Abſciſſenare eine Are der Curve.*

Wenn die Gleichung $f(x,y) = o$ eine *ganze algebraiſche* iſt, und *nur gerade* Potenzen von y enthält, ſo iſt die Are der x eine Are der Curve. — Ebenſo, wenn f (x, y) nur *gerade* Potenzen von x enthält, ſo iſt die Are der y eine Are der Curve. — Hierbei wird jedoch vorausgeſetzt: daß ſich die Gleichung $f(x,y) = o$ *nicht zerlegen* läßt, und wenn man dieſes nicht zum Voraus mit Gewißheit weiß; ſo muß man wie in §. 93 verfahren.

Iſt die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben, ſo iſt die Polarare eine Are der Curve, wenn ihre Gleichung ungeändert bleibt, indem man $-\vartheta$ ſtatt ϑ ſetzt. Denn alsdann bleiben die Werthe von ϱ dieſelben, und es haben folglich die Punkte der Curve paarweiſe eine ſymmetriſche Lage gegen die Polarare. — Ein Beiſpiel bietet die Epicycloide dar.

§. 101.

Beſtimmung der Aren.

Wir wollen die unbekannte Are $X'_1 X'$ zur neuen Are der x nehmen, den Anfangspunkt in einen Punkt (a, b) dieſer Are verlegen, und den Winkel, welchen $X'_1 X'$ mit XO bildet, mit α bezeichnen; ſo wird die Gleichung der Curve:

$$f(a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,\ b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) = o,$$

und es bleibt noch zu unterſuchen: ob ſich a, b und α ſo beſtimmen laſſen, daß die letzte Gleichung die vorhin angegebene Eigenſchaft hat.

Man kann einen beliebigen Punkt der Axe, z. B. den, worin sie die Axe der y schneidet, zum Anfangspunkte nehmen, so daß man nur zwei unbestimmte Größen b, a hat. — Wenn die Gleichung algebraisch und nicht zerlegbar ist, so muß man alle ungeraden Potenzen von y fortzuschaffen suchen. Ist die Gleichung vom zweiten Grade, so sind zwei Glieder, nämlich das mit xy und das mit y wegzuschaffen, was im Allgemeinen immer möglich ist. — Aber wenn die Gleichung von einem höhern als vom zweiten Grade ist, so ist die Anzahl der verschwinden zu machenden Coefficienten gewöhnlich größer als 2, und die erhaltenen Gleichungen können selten nebeneinander bestehen.

Wenn die Curve einen Mittelpunkt hat, so geht die Axe offenbar durch denselben.

Wenn die Gleichung der Curve in Beziehung auf x und y symmetrisch ist, so ist die Halbirungslinie des Coordinatenwinkels eine Axe der Curve. Denn wenn man diese Gerade zur Axe der x', und das Perpendikel darauf zur Axe der y' nimmt; so geben die Transformationsformeln in §. 12:

$$x \sin \vartheta = x' \sin \frac{\vartheta}{2} - y' \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad y \sin \vartheta = x' \sin \frac{\vartheta}{2} + y' \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Bleibt nun x' dasselbe und wird — y' für y' gesetzt, so wird dadurch x mit y vertauscht, und nach der Voraussetzung die Gleichung nicht geändert.

Das Folium von Descartes (Fig. 65):

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

ist symmetrisch in Bezug auf x und y, und hat folglich die Halbirungslinie des Axenwinkels zur Axe. — Dieses erhellet auch aus der Figur. Denn jedem Punkte A, dessen Coordinaten OP, AP sind, entspricht ein Punkt A_1, dessen Coordinaten OQ, QA_1 resp. den vorhergehenden gleich sind. Da OP = OQ ist, so schneiden sich die Geraden AP, A_1Q in einem Punkte D' der Halbirungslinie DC, und folglich ist in dem gleichschenkligen Dreiecke $AD'A_1$ die Halbirende D'X' auf der Mitte von AA_1 senkrecht, mithin AF = A_1F und folglich die Halbirende DX' eine Axe der Curve.

Die Curve:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1^{\frac{2}{3}} \text{ (§. 86)}$$

hat nicht blos die beiden Coordinatenaxen, sondern auch die beiden Halbirungslinien der Coordinatenwinkel als Axen; denn die Gleichung

ist sowohl in Bezug auf x und y, als in Beziehung auf $-x$ und y symmetrisch.

§. 102.

Axen der Curven des zweiten Grades.

In diesen Curven ist die Axe nichts anders als ein auf den halbirten Sehnen *senkrechter* Durchmesser. Nun findet aber nach dem Frühern für die *conjugirten* Richtungen die Relation statt:

$$2Caa_1 + B(a + a_1) + 2A = o,$$

und damit diese Richtungen aufeinander *senkrecht* sind, muß man haben:

$$1 + (a + a_1)\cos\vartheta + aa_1 = o,$$

wo ϑ den Winkel der Coordinatenaxen bezeichnet. Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$aa_1 = \frac{2A\cos\vartheta - B}{B - 2C\cos\vartheta},\quad a + a_1 = \frac{2(C - A)}{B - 2C\cos\vartheta},$$

und mithin sind a, a_1 die Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$(B - 2C\cos\vartheta)z^2 + 2(A - C)z + 2A\cos\vartheta - B = o. \quad (3)$$

Wenn die Coordinatenaxen auf einander *senkrecht* sind, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$Bz^2 + 2(A - C)z - B = o.$$

Da die Bedingung der Realität der Wurzeln der Gleichung (3):

$$(A - C)^2 - (2A\cos\vartheta - B)(B - 2C\cos\vartheta) > o$$

immer erfüllt wird, so gibt es in einer Curve des zweiten Grades im Allgemeinen ein System aufeinander senkrechter conjugirter Richtungen, und die zu diesen beiden Richtungen parallelen Durchmesser sind zwei *Axen* der Curve. — In der *Parabel* gibt es jedoch nur *eine* Axe, welche zu der allgemeinen Richtung der Durchmesser parallel ist; aber die Curve nur in *einem* Punkte (Scheitel) schneidet. In der That hat in diesem Falle die obige Gleichung des zweiten Grades die Wurzel $-\frac{B}{2C}$.

Wenn zu gleicher Zeit $A = C$ und $B = 2A\cos\vartheta$ ist, so wird die Gleichung (3) für *jeden* Werth von z erfüllt, und wir wissen, daß in diesem Falle die Curve ein *Kreis* ist. — Im Kreise ist also jeder Durchmesser eine Axe.

---

§. 103.

Ueberſicht.

Ueberſehen wir jetzt nochmals in aller Kürze, was wir bisher über die Conſtruction einer Curve erörtert haben: Wenn eine ganze algebraiſche Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben iſt, ſo unterſucht man zunächſt die Form dieſer Gleichung, um diejenigen Eigenſchaften der Curve kennen zu lernen, welche ſich unmittelbar aus der Betrachtung des Polynomes $f(x, y)$ ergeben.

1) Wenn das Polynom $f(x, y)$ nur gerade Potenzen von y enthält, ſo iſt die Curve in Beziehung auf die Axe der x ſymmetriſch, welche folglich alsdann eine Axe der Curve iſt.

2) Wenn das Polynom lauter Glieder von einerlei Dimenſion enthält, ſo iſt der Anfangspunkt der Coordinaten Mittelpunkt der Curve. — Oft bemerkt man, daß die gegebene Gleichung durch eine Coordinatenveränderung vereinfacht wird, und die eben erwähnten Umſtände ſich herausſtellen (§. 46). — Wenn das Polynom $f(x, y)$ in Bezug auf x und y ſymmetriſch iſt, ſo iſt die Halbirungslinie des Coordinatenwinkels eine Axe der Curve, und es iſt alsdann natürlich, die Coordinatenaxen um 45° zu drehen, wie bei dem Folium des Descartes (§. 47) und in dem fünften Beiſpiele in §. 53.

Zur nähern Beſtimmung der Form der Curve conſtruirt man die Tangenten in den merkwürdigſten Punkten, beſonders in den Grenzpunkten, vermittelſt der Formel $I = -\frac{f'_x}{f'_y}$, und beſtimmt dann die Punkte, für welche die Ordinaten Maxima oder Minima ſind. — Dann unterſucht man die Curve in Beziehung auf Concavität und Converität, beſtimmt die Inflexionspunkte, und wenn die Curve unendliche Zweige hat; ſo beſtimmt man die Aſymptoten derſelben.

Endlich kann die Curve noch andere, ſogenannte ausgezeichnete oder ſinguläre Punkte darbieten, auf deren allgemeine Unterſuchung wir uns jedoch hier nicht einlaſſen wollen.

Außer den iſolirten Punkten, wie C in Fig. 53 bei der Conchoide, und den Inflexionspunkten, wie der Anfangspunkt bei der Curve $y^3 = x^5$ (Fig. 49) gehören hieher: der Rückkehrpunkt O (Fig. 50) der erſten Art bei der Curve $y^2 = x^3$, der Rückkehrpunkt der zweiten Art, wie O (Fig. 142) bei

der Curve $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$, der vielfache Punkt, durch welchen mehrere Zweige der Curve gehen, wie C (Fig. 55) im dritten Falle der Conchoide und bei der Lemniscate (Fig .58) der Anfangspunkt der Coordinaten.

Wenn die Gleichung der Curve keine ganze algebraiſche, ſondern eine transcendente, oder auch nur eine irrationale algebraiſche iſt, worin eine Wurzelgröße mit geradem Index nur mit einem Vorzeichen genommen wird; ſo können noch andere Arten ſingulärer Punkte vorkommen, wie z. B. in der Curve $y = \sqrt{x^5}$, welche nur den einen Zweig OA (Fig. 135) hat, der ſich in O ſchließt, weshalb O ein Schlußpunkt genannt wird, oder in der transcendenten Curve $y = \frac{1}{\tang x}$ (Fig. 136). Ferner der vorſpringende Punkt (die Spitze), wie O (Fig. 137) bei der Curve $y = \sqrt{x^2 + 2x^3}$, welche aus zwei Zweigen OA, OB beſteht, welche die Halbirungslinien OC, OD der Axenwinkel in O berühren.

Wir wollen das Vorhergehende nur noch an einem vollſtändig durchgeführten Beiſpiele zu erläutern ſuchen, und dazu die Curve:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(y^4 - x^4 - 96\,a^2 y^2 + 100\,a^2 x^2) = 0$$

nehmen.

Aus der bloßen Anſicht dieſer Gleichung erhellet: daß der Anfangspunkt der Coordinaten ein Mittelpunkt der Curve iſt, und daß die Coordinatenaxen Axen derſelben ſind, ſo daß ſie aus vier gleichen Theilen beſteht. — Wir wollen blos den in dem Winkel YOX (Fig. 138) liegenden Theil betrachten, d. h. x und y nur poſitive Werthe beilegen.

Wird die Gleichung für y aufgelöſ't, ſo erhält man:

$$y = \sqrt{48\,a^2 \pm \sqrt{x^4 - 100\,a^2 x^2 - 48^2 a^4}}$$

$$= \sqrt{48\,a^2 \pm \sqrt{(x^2 - 6^2 a^2)(x^2 - 8^2 a^2)}},$$

oder beide Werthe getrennt:

$$y' = \sqrt{48\,a^2 + \sqrt{(x^2 - 6^2 a^2)(x^2 - 8^2 a^2)}},$$

$$y'' = \sqrt{48 a^2 - \sqrt{(x^2 - 6^2 a^2)(x^2 - 8^2 a^2)}}$$

Die zweite Wurzelgröße iſt reell für die Werthe von x, welche $< 6\,a$ und für die, welche $> 8\,a$ ſind. Wir wollen a zur Längen-

einheit nehmen und auf die Axe der x, so wie auf die der y eine gewisse Anzahl solcher Einheiten abtragen.

y' ist reell von x=o bis x=6 und von x=8 bis x=∞. Soll y'' reell sein, so muß außer dem $48^2a^4 > x^4 - 100a^2x^2 + 48^2a^4$ oder $x < 10a$ sein; folglich ist y'' reell von x = o bis x = 6 und von x=8 bis x = 10. Wenn x sich von o bis 6 ändert, so wächst y'' von o bis $\sqrt{48}$, wodurch man den Curvenzweig OA erhält, und wenn x sich von 8 bis 10 ändert, so nimmt y'' von $\sqrt{48}$ bis o ab, wodurch man den Zweig DC erhält. — Aendert sich x von o bis 6, so nimmt y' von $\sqrt{96}$ bis $\sqrt{48}$ ab, wodurch man den Zweig BA erhält, und wenn x sich von 8 bis 10, dann von 10 bis ∞ ändert; so wächst y' von $\sqrt{48}$ bis $\sqrt{96}$ und von da bis ∞, wodurch man den unendlichen Curvenzweig DE bekommt. Diese Theile der Curve schließen sich an einander und bilden die beiden stetigen Zweige OAB, CDE.

Tangente. — Es ist:

$$f'_x = -x^3 + 50a^2x, \quad f'_y = y^3 - 48a^2y,$$

folglich:

$$I = \frac{x(x^2-50a^2)}{y(y^2-48a^2)}.$$

In den Punkten A, D, C ist I = ∞; also die Tangente parallel zu der Axe der y, und in B ist I = o; also die Tangente parallel zu der Axe der x und die Ordinate ein Maximum.

Der Anfangspunkt ist ein vielfacher Punkt, und wenn man $\frac{y}{x} = u$ setzt; so wird die Gleichung der Curve:

$$\left(u^2 - \frac{25}{24}\right) - \frac{1}{96a^2}(u^4 - 1)x^2 = o,$$

also:

$$I = Gr.\, u = \frac{5}{\sqrt{24}} > 1.$$

Wenn man u einen zwischen 1 und $\frac{5}{\sqrt{24}}$ liegenden Werth beilegt, so werden beide Glieder der Gleichung negativ, und es kann ihr nicht genügt werden. Wenn OH die Halbirungslinie des Coordinatenarenwinkels und OK die Tangente in O ist; so hat die Curve in dem Winkel KOH keinen Punkt, und folglich liegt der Zweig OAB ganz über der Tangente OK.

Asymptote. — Es ist:

$$\varphi = y^4 - x^4,\ \varphi(1, c) = c^4 - 1 = 0,\ c = 1,\ \psi = 0,\ d = 0.$$

Der unendliche Zweig DE hat die Halbirungslinie OH zur Asymptote, und da die Curve in dem Winkel HOK keinen Punkt hat; so liegt der Zweig CDE ganz unter der Asymptote OH.

Concavität. — Es ist:

$$f''_{x^2} = -3x^2 + 50a^2,\ f''_{y^2} = 3y^2 - 48a^2;$$

folglich wegen $a = 1$:

$$I' = \frac{\frac{1}{2}(y^4 - x^4)(x^2 y^2 - 48 \cdot 50)}{y^3 (y^2 - 48)^3}.$$

Der erste Factor des Zählers ist längs OAB positiv, während der zweite Factor des Zählers und der Nenner von O bis A negativ sind. Folglich kehrt der Zweig OA seine Concavität gegen die Axe der positiven y. — Ferner ist der erste Factor des Zählers längs CDE negativ, aber der zweite Factor und der Nenner sind von D bis E positiv; folglich kehrt der Zweig DE seine Concavität gegen die Axe der negativen y. Nur auf dem Zweige BA oder CD, und zwar wegen der Zeichenänderung des zweiten Factors des Zählers, kann es Inflexionspunkte geben. — Verbindet man die Gleichung:

$$x^2 y^2 - 48 \cdot 50 = 0$$

mit der gegebenen, so erhält man:

$$x^8 - 10^2 x^6 + 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot x^2 - 6^2 \cdot 8^2 \cdot 50^2 = 0$$

oder:

$$x^6 (x^2 - 6^2) - 8^2 (x^3 - 6 \cdot 50)^2 = 0.$$

Da beide Glieder dieser Gleichung von $x = 0$ bis $x = 6$ negativ sind, so hat sie in diesem Intervalle keine Wurzel; und da der erste Theil der Gleichung von $x = 8$ bis $x = 10$ vom Negativen zum Positiven übergeht, so hat sie in diesem Intervalle eine ungerade Anzahl von Wurzeln, und zwar nur eine, weil, wenn sie deren 3 hätte, die Ableitung:

$$(8x^6 - 6 \cdot 10^2 x^4 + 2 \cdot 10^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2) x$$

oder blos die in der Klammer stehende Größe, zweimal, und die Ableitung hiervon:

$$6 \cdot 8 \cdot x^3 (x^2 - 50)$$

einmal in diesem Intervalle verschwinden müßte, was nicht möglich ist. — Die Curve hat also nur einen Inflexionspunkt, welcher auf dem Zweige CD liegt.

Wenn man die Gleichung: $x^2 + y^2 = 10^2$ das aus dem An-

fangspunkte mit dem Halbmeſſer = 10 beſchriebenen Kreiſes mit der Gleichung der Curve verbindet, ſo findet man, daß der Kreis und die Curve nur den einen gemeinſchaftlichen Punkt C haben, ſo daß der Curvenzweig CDE alſo außerhalb und der Curvenzweig OAB innerhalb des Kreiſes liegt. — Ueberhaupt iſt dieſer Kreis bei der Conſtruktion der Curve ein guter Führer.

Uebungsaufgaben.

Man ſoll folgende Curven conſtruiren:

1) $y^4 - x^4 + 2ax^2y = o$,
2) $y^4 + x^4 - 2ay^3 - 2bx^2y = o$,
3) $(x^2 + y^2)^2 - 6axy^2 - 2ax^3 + 2a^2x^2 = o$,
4) $(y - x^2)^2 - x^5$ (Fig. 134),
5) $y = a + b(x - c)^m$.

Dreizehntes Kapitel.

Von den zur Beſtimmung einer Curve einer gegebenen Gattung erforderlichen Bedingungen.

§. 104.

In §. 15 haben wir geſehen, wie man, wenn die geometriſche Definition einer Curve einer gewiſſen Gattung gegeben iſt, die allgemeine Gleichung der Gattung:

$$F(x, y, a, b, \ldots h) = o \qquad (1)$$

findet, wo a, b, . . . h die n willkürlichen Parameter bezeichnen. Man erhält eine ſpecielle Curve der Gattung, wenn man dieſen Parametern Zahlenwerthe beilegt; allein ſtatt deſſen kann man dieſe Parameter auch dadurch beſtimmen, daß die Curve gewiſſe Bedingungen erfüllen, z. B. durch gegebene Punkte gehen, gegebene Linien berühren, ꝛc. ꝛc. muß. Soll die Curve durch einen gegebenen Punkt (x', y') gehen, ſo hat man die Bedingungsgleichung:

$$F(x', y', a, b, \ldots h) = o;$$

ſoll ſie eine gegebene Linie berühren, ſo erhält man ebenfalls eine Bedingungsgleichung, ꝛc. Wenn die Curve n Bedingungen genügen muß, ſo erhält man n Gleichungen, welche die n Parameter, und folglich die Curve ſelbſt beſtimmen. Die Anzahl der Para-

meter, welche in der allgemeinen Gleichung einer Curvengattung vorkommen, iſt alſo der Anzahl der zur Beſtimmung einer Curve dieſer Gattung erforderlichen Bedingungen gleich.

Die gegebenen Bedingungen können auch zuſammengeſetztere ſein, wie z. B. wenn der Mittelpunkt, eine Axe, der Scheitel, eine Aſymptote, ꝛc. gegeben wäre. — Iſt der Mittelpunkt gegeben, ſo ſind ſeine beiden Coordinaten gegeben, und wenn man ſie in die beiden Gleichungen des Mittelpunktes ſubſtituirt; ſo erhält man zwei Bedingungsgleichungen zwiſchen den Parametern. — Iſt eine Axe, oder Aſymptote gegeben, und man ſetzt die beiden Coefficienten ihrer Gleichung den beiden Conſtanten gleich, welche ihre Lage beſtimmen; ſo erhält man ebenfalls zwei Bedingungsgleichungen. — Iſt ein Scheitel gegeben, ſo müſſen ſeine Coordinaten ſowohl der Gleichung der Curve, als der der Axe genügen, was wieder zwei Bedingungsgleichungen gibt, u. ſ. f. Jede der angeführten compleren Bedingungen iſt alſo zwei einfachen Bedingungen gleichgeltend.

Die allgemeine Gleichung der Ellipſe und Hyperbel enthält 5 willkürliche Parameter, und es ſind folglich zur Beſtimmung einer Ellipſe und Hyperbel auch 5 Bedingungen, z. B. 5 Punkte; der Mittelpunkt und drei Punkte; der Mittelpunkt, ein Scheitel und eine Tangente, ꝛc. erforderlich. — Die allgemeine Gleichung der Parabel enthält nur 4 Parameter, weil $m = 1$ iſt, und es ſind mithin zur Beſtimmung einer Parabel auch nur 4 Bedingungen nothwendig. — Man muß ſich aber bei der Beſtimmung der Anzahl der Bedingungen wohl hüten: daß man dieſelbe Bedingung nicht zweimal zählt. Wenn z. B. der Mittelpunkt und die Axe gegeben ſind, ſo iſt dies nur ſo gut, wie 3 einfache Bedingungen, weil die Axe durch den Mittelpunkt geht und zu ihrer Beſtimmung nur noch eine Bedingung erforderlich iſt.

Auch muß man wohl unterſuchen: ob die in der allgemeinen Gleichung vorkommenden Parameter wirklich verſchieden ſind, d. h. ſich nicht auf eine kleinere Anzahl reduciren laſſen. — So hat z. B. der Kreis als Ort der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten in einem conſtanten Verhältniſſe ſtehen, zur allgemeinen Gleichung:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-m^2(x-a')^2+(y-b')^2=0,$$

welche 5 Parameter zu enthalten ſcheint, die ſich aber auf 3 reduciren laſſen; denn man kann dieſe Gleichung folgendermaßen ſchreiben:

$$x^2 + y^2 - \frac{2(a - m^2 a')}{1 - m^2} x - \frac{2(b - m^2 b')}{1 - m^2} y + \frac{a^2 + b^2 - m^2(a'^2 + b'^2)}{1 - m^2} = 0,$$

oder:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

welche nur 3 Parameter A, B, C enthält.

Wird derselbe Kreis als Ort der Punkte von der Beschaffenheit betrachtet: daß die Summe der Quadrate der Entfernungen eines jeden von n gegebenen Punkten constant ist; so ist seine allgemeine Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} x - 2\frac{b_1 + b_2 + \ldots b_n}{n} y + \frac{a^2{}_1 + b^2{}_1 + a^2{}_2 + b^2{}_2 + \ldots + a^2{}_n + b^2{}_n - k}{n} = 0,$$

welche $2n+1$ willkürliche Parameter zu enthalten scheint, in der That aber nur 3 wesentlich verschiedene Parameter enthält; denn man kann immer setzen:

$$a = -\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad b = -\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n},$$

$$c = \frac{a^2{}_1 + b^2{}_1 + a^2{}_2 + b^2{}_2 + \ldots + a^2{}_n + b^2{}_n - k}{n},$$

so daß die Gleichung wird:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Eine aus n Gliedern bestehende Gleichung enthält höchstens $n - 1$ willkürliche Parameter; denn wenn man die Gleichung durch einen der Coefficienten dividirt, so kann man die $n - 1$ entstehenden Quotienten durch $n - 1$ Buchstaben bezeichnen. — Die vollständige Gleichung des m^{ten} Grades mit zwei Veränderlichen hat $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ Glieder, und folglich sind zur Bestimmung einer Curve des m^{ten} Grades höchstens $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$ Bedingungen erforderlich.

Die geometrische Definition einer Curve gibt die Anzahl der in ihrer allgemeinen Gleichung enthaltenen willkürlichen Parameter von selbst an. — In der Definition des Kreises kommt der Mittelpunkt und der Halbmesser vor; also zusammen 3 Constanten — in der Definition der Parabel ein Pol (2 Constanten) und eine Richtlinie (2 Constanten), also im Ganzen 4 Constanten — in der

Definition der Ellipse und Hyperbel außerdem noch ein Verhältniß, also 5 Constanten — in der Definition der Archimedischen Spirale ein Pol (2 Constanten), die anfängliche Lage des Vectors (1 Constante) und ein Verhältniß, also im Ganzen 4 Constanten.

§. 105.

Wir sind bisher bei der Bestimmung der Gattung der Curven von den geometrischen Bedingungen oder Definitionen ausgegangen; allein man könnte auch analytisch verfahren, und die in einer gegebenen Gleichung:

$$F(x, y, a, b, \ldots h) = 0 \qquad (1)$$

enthaltenen Curven zu derselben Gattung zählen. So nennt man z. B. alle in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

enthaltene Curven, Curven des zweiten Grades. Zunächst muß man sich jedoch versichern, ob die gegebene Gleichung allgemein ist, d. h. ob die Gleichung die entsprechende Curve auch noch gibt, wenn diese beliebig in ihrer Ebene verrückt wird, so daß, wenn die Transformation der Coordinaten durch drei neue Parameter p, q, α bewerkstelligt wird, die erhaltene Gleichung:

$$F(x, y, a, b, \ldots h, p, q, \alpha) = 0 \qquad (2)$$

mit der Gleichung:

$$F(x', y', a', b', \ldots h') = 0$$

identificirt werden kann, also die Anzahl der Parameter durch die Transformation nicht vergrößert wird. — Ist dieses nicht der Fall, d. h. lassen sich die $n + 3$ Parameter a, b, . . . h, p, q, α nicht auf n Parameter reduciren; so ist die Gleichung (1) nicht allgemein, und man nimmt die Gleichung (2) als Gattungsgleichung.

Vierzehntes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit.

§. 106.

Homothetie.

Wenn man durch einen beliebigen Punkt O (Fig. 139) nach einem Systeme von Punkten A, B, C, . . . in derselben Ebene die

Radienvectoren OA, OB, OC, . . . zieht, und auf denſelben die Punkte A′, B′, C′, . . . ſo nimmt, daß

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \ldots = k$$

iſt; ſo heißt das letzte Punkteſyſtem dem erſten *ähnlich und ähnlichliegend*; aber wenn die Punkte A′, B′, C′, . . . auf den *rückwärts verlängerten* Vectoren genommen werden und der obigen Relation genügen (Fig. 140), ſo heißen beide Syſteme *ähnlich und invers liegend*. — Durch eine Drehung von 180° wird das zweite Syſtem dem erſten ähnlich und ähnlichliegend. Der Kürze wegen wollen wir dieſe Aehnlichkeit der Form und Lage in beiden Fällen reſp. mit dem Namen *direkte* und *inverſe Homothetie* bezeichnen. — Läßt man k ſich von o bis ∞ ändern, und den Punkt O, welcher der *Aehnlichkeitsmittelpunkt* genannt wird, alle möglichen Lagen in der Ebene annehmen; ſo erhält man alle dem gegebenen Syſteme homothetiſche Syſteme. — Die auf demſelben Vector, oder auf zwei entgegengeſetzten Vectoren liegenden Punkte A, A′ heißen *homologe*.

§. 107.

Eigenſchaften der direkten und inverſen homothetiſchen Figuren.

1) Zwei Gerade, welche zwei Paare homologer Punkte A, B und A′, B′ verbinden, und deshalb *homologe* heißen, ſind *parallel*, und das Verhältniß ihrer Längen iſt dem Aehnlichkeitsverhältniſſe k gleich.

Denn nach der Vorausſetzung iſt $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = k$: folglich AB *parallel* zu A′B′ und mithin $\frac{AB}{A'B'} = k$.

2) Wenn drei Punkte in *gerader* Linie liegen, ſo liegen die drei homologen Punkte auch in gerader Linie.

3) Der Winkel zweier Geraden iſt dem Winkel der homologen Geraden gleich.

4) Der Durchſchnittspunkt zweier Geraden iſt der homologe Punkt des Durchſchnittspunktes der beiden homologen Geraden. — Wenn mehrere Gerade durch denſelben Punkt gehen, ſo gehen die homologen Geraden durch den homologen Punkt.

5) Wenn man irgend einen Punkt I der Ebene mit den verſchiedenen Punkten des erſten Syſtemes und ſeinen *homologen*

Punkt I′ mit den verſchiedenen Punkten des zweiten Syſtemes verbindet; ſo ſind die auf dieſe Weiſe erhaltenen Geraden paarweiſe parallel und in dem conſtanten Verhältniſſe k. — Dieſer Satz folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden.

Umgekehrt, wenn die beiden Syſteme A, B, C, . . . und A′, B′, C′, . . . ſo beſchaffen ſind, daß die Geraden IA, IB, IC, . . . reſp. den Geraden I′A′, I′B′, I′C′, . . . parallel ſind, und zu ihnen in dem conſtanten Verhältniſſe k ſtehen; ſo ſind die beiden Punkteſyſteme direkt, oder invers homothetiſch, jenachdem IA, . . . und I′A′, . . . einerlei, oder entgegengeſetzte Richtungen haben. — Denn nimmt man im erſten Falle auf I′I und im zweiten Falle auf ihrer Verlängerung einen Punkt O von ſolcher Beſchaffenheit, daß $\frac{OI'}{OI} = k$ iſt, ſo fallen die beiden Radien oder Strahlen OA, OA′ zuſammen, und es iſt O der Mittelpunkt der Homothetie.

6) Es ſeien M, M_1 zwei benachbarte Punkte einer Curve, und M′, M'_1 die beiden homologen Punkte auf der homothetiſchen Curve, ſo ſind die Sekanten MM_1 und $M'M'_1$ parallel. Nähert ſich nun M_1 dem Punkte M unendlich, ſo nähert ſich auch M'_1 dem Punkte M′ unendlich, und die ſtets zu einander parallelen Sekanten ſind auch in ihren Grenzlagen, d. h. als Tangenten zu einander parallel. Folglich ſind die Tangenten in homologen Punkten parallel.

7) Zwei Syſteme, welche einem dritten Syſteme homothetiſch ſind, ſind homothetiſch unter ſich. — Denn es ſei A, B, . . . I ein gegebenes Syſtem, ſo conſtruire man mittelſt des Mittelpunktes O und des Verhältniſſes k ein erſtes homothetiſches Syſtem A′, B′, . . . I′ und mit Hülfe des Mittelpunktes O′ und des Verhältniſſes k′ ein zweites homothetiſches Syſtem A″, B″, . . . I″. Alsdann ſind A′I′ und A″I″ parallel zu AI, und folglich parallel unter ſich, und ſtehen in dem conſtanten Verhältniſſe $\frac{k'}{k} = k_1$, weil $\frac{AI}{A'I'} = k$ und $\frac{AI}{A''I''} = k'$ folglich $\frac{A'I'}{A''I''} = \frac{k'}{k} = k_1$ iſt. Die beiden Syſteme A′, B′, . . . I′ und A″, B″, . . . I″ ſind alſo nach 5) homothetiſch unter ſich. Zwei Punkte A′ und A″, welche die homologen deſſelben dritten A ſind, ſind homolog unter ſich. — Wenn die beiden Syſteme A′, . . . A″, . . . gleichzeitig mit A direkt, oder invers homothetiſch ſind, ſo ſind ſie direkt ho-

mothetiſch unter ſich; aber wenn A′ direkt und A″ invers homothetiſch mit A iſt, ſo ſind A′, A″ *invers* homothetiſch.

8) Hätte man die beiden Syſteme A′, . . . und A″, . . . mittelſt *deſſelben* Verhältniſſes conſtruirt, ſo wären ſie *gleich* und aufeinanderlegbar. — Denn wenn $k = k'$ iſt, ſo ſind die Parallelen I′A′, I″A″ *gleich*, und die beiden Syſteme ſind aufeinanderlegbar. — Man erhält alſo zu einem gegebenen Syſteme vermittelſt eines einzigen Aehnlichkeitsmittelpunktes alle homothetiſchen Syſteme, wenn man das Verhältniß k ſich von o bis ∞ ändern läßt; aber dieſe Syſteme haben in der Ebene *beſondere* Lagen.

9) Die drei Aehnlichkeitsmittelpunkte dreier Paare homothetiſcher Syſteme liegen in *gerader* Linie. — Denn läßt man den Punkt I in O′ fallen, ſo fällt I″ auch in O′ und I′ auf die Gerade OO′; aber der Aehnlichkeitsmittelpunkt O″ der beiden Syſteme A′ und A″ liegt auf der Geraden I′I″; folglich liegt er auf OO′.

10) Es ſeien S, S′ (Fig. 141) zwei Curven, welche einen Mittelpunkt haben und z. B. *direkt* homothetiſch ſind, ſo ſind ſie auch *invers* homothetiſch. Denn ſind C, C′ die Mittelpunkte der beiden Curven, und M, M′ zwei homologe Punkte, und man nimmt auf C′M′ einen Punkt M'_1 ſo, daß $C'M'_1 = C'M'$ iſt; ſo gehört der Punkt M'_1 der Curve S′ an. — Nun iſt aber $\frac{CM}{C'M'} = k$, alſo auch $\frac{CM}{C'M'_1} = k$. Die beiden Curven S, S′ haben alſo *zwei* Aehnlichkeitsmittelpunkte, nämlich einen *äußern*, auf der Verlängerung der Geraden CC′ liegenden, welcher den *direkt* homothetiſchen Curven entſpricht, und einen *innern*, auf der Geraden CC′ ſelbſt liegenden, welcher den beiden *invers* homothetiſchen Curven entſpricht. — Die Mittelpunktslinie wird von den beiden Aehnlichkeitsmittelpunkten harmoniſch getheilt.

11) Hat man drei homothetiſche Curven S, S′ und S″ (Fig. 141) und man zieht durch ihre Mittelpunkte C, C′, C″ drei parallele Radien CM, C′M′, C″M″, ſo beſtimmen ſie die homologen Punkte M, M′, M″. — Wenn dieſe drei Radien in *derſelben* Richtung gezogen ſind, ſo ſind die entſprechenden drei Mittelpunkte der Homothetie *äußere*. Sind zwei Radien in derſelben und der dritte in entgegengeſetzter Richtung gezogen, ſo iſt der eine Mittelpunkt ein *äußerer* und die beiden andern ſind *innere*. — Die drei äußern Mittelpunkte liegen alſo nach einem bewieſenen Satze (9)

in gerader Linie, und daſſelbe gilt von irgend zwei innern Mittelpunkten und dem äußern Mittelpunkte, welcher dem dritten innern entſpricht.

Die drei Mittelpunktslinien CC′, C′C″, C″C bilden ein Dreieck, und wenn man die drei innern, oder zwei äußern und den entſprechenden innern der Mittelpunkte der Homothetie mit den gegenüberliegenden Winkelſpitzen verbindet; ſo gehen die drei Verbindungslinien durch denſelben Punkt.

Aehnliche Figuren. — Eine Figur heißt einer andern ähnlich, wenn ſie einer homothetiſchen der letztern gleich iſt.

§. 108.

Gleichung homothetiſcher Curven.

Es ſei:

$$f(x, y) = o \qquad (1)$$

die Gleichung einer Curve S, ſo wollen wir den Anfangspunkt zum Mittelpunkte der Homothetie nehmen und mit dem Verhältniſſe k eine Curve S′ conſtruiren, welche zu der erſten homothetiſch iſt. Sind alsdann x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes der erſten Curve und x′, y′ die des homologen Punktes der zweiten; ſo hat man:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = k,$$

wo k poſitiv, oder negativ iſt, jenachdem die Homothetie eine directe, oder inverſe iſt. Die Gleichung:

$$f(kx', ky') = o$$

iſt folglich die allgemeine Gleichung der homothetiſchen Curven der gegebenen, indem der Anfangspunkt der Mittelpunkt der Homothetie iſt.

Läßt man die Curve S feſtliegen und verrückt die Curve S′ in ihrer Ebene ſo, daß der Anfangspunkt O in den Punkt O′ oder (p, q) fällt; aber die Axen zu ihrer urſprünglichen Richtung parallel bleiben; ſo iſt die Gleichung der Curve S′ in Bezug auf die Axen O′X′, O′Y′:

$$f(kx', ky') = o,$$

und in Beziehung auf die Axen OX, OY:

$$f(k(y-p), k(y-q)) = o \qquad (3)$$

In dieſer neuen Lage iſt die Curve S′ mit S homothetiſch; denn die aus O und O′ gezogenen Radienvectoren ſind parallel und

in dem constanten Verhältnisse k. — Die Gleichung (3), welche drei willkürliche Parameter p, q, k enthält, ist folglich die allgemeine Gleichung der homothetischen Curven der gegebenen Curve.

§. 109.

Gleichung ähnlicher Curven.

Wenn man mit der Verlegung des Anfangspunktes nach O' zugleich eine Drehung der Axen um einen Winkel α verbindet, so hat die Curve S' eine beliebige Lage in ihrer Ebene, und ist der gegebenen blos ähnlich. — Die Gleichung der auf die beweglichen Axen O'X', O'Y' bezogenen Curve S' ist:

$$f(kx', ky') = o,$$

und bei rechtwinkligen Axen erhält man mittelst der Transformationsformeln:

$$x' = (x-p)\cos\alpha + (y-q)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x-p)\sin\alpha + (y-q)\cos\alpha$$

als Gleichung der Curve in Bezug auf die festen Axen OX, OY:

$$f\left[k\left((x-p)\cos\alpha+\ldots\right), k(\ldots)\right] = o, \quad (4)$$

welche 4 willkürliche Parameter enthält, und die allgemeine Gleichung der ähnlichen Curven der gegebenen Curve ist.

Beispiel. Es seien die beiden Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= o, \\ A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' &= o \end{aligned}\right\} \quad (\mu)$$

gegeben, so ist die allgemeine Gleichung der homothetischen Curven der durch die erste Gleichung ausgedrückten Curve:

$$Ak^2x^2 + Bk^2xy + Ck^2y^2 - (Bk^2q + Ak^2p - Dk)x$$
$$-(Bk^2p + 2Ck^2q - Ek)y$$
$$+(Ak^2p^2 + Bk^2pq + Ck^2q^2 + Dkp + Ekq + F) = o.$$

Identificirt man diese letzte Gleichung mit der zweiten, so erhält man:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{-Bq - 2Ap + \frac{D}{k}}{D'} = \frac{-Bp - 2Cq + \frac{E}{k}}{E'}$$
$$= \frac{Ap^2 + Bpq + Cq^2 - \frac{D}{k}p - \frac{E}{k}q + \frac{F}{k^2}}{F'},$$

und wenn man zwischen diesen 5 Gleichungen die 3 Parameter p, q, k

eliminirt; ſo bekommt man die zwei Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken: daß die den Gleichungen (μ) entſprechenden Curven homothetiſch ſind. — Nun ſind aber die beiden Gleichungen:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

worin die zu eliminirenden Parameter nicht vorkommen, gerade die beiden verlangten Bedingungsgleichungen. — Sollen alſo zwei Curven des zweiten Grades homothetiſch ſein, ſo müſſen die Coefficienten der Glieder des zweiten Grades proportional ſein.

§. 110.

Allgemeine Bedingungen der Aehnlichkeit zweier Figuren.

1) Wenn eine Gleichung:

$$f(x, y, a) = o,$$

worin der willkürliche Parameter a vorkommt, in Beziehung auf x, y, a homogen iſt, ſo ſind alle durch ſie ausgedrückte Curven homothetiſch. Denn gibt man dem Parameter a den beſondern Werth a_o, ſo ſind alle ähnlichen Curven von $f(x, y, a_o) = o$ in der Gleichung:

$$f(kx, ky, a_o) = o$$

enthalten, oder wenn man $a = \frac{a_o}{k}$ ſetzt, in der Gleichung:

$$f(kx, ky, ka) = o$$

und endlich wegen der Homogeneität in der Gleichung:

$$f(x, y, a) = o$$

wo a ganz willkürlich iſt, weil k es iſt.

2) Die in der allgemeinen Gleichung einer Curvengattung enthaltenen n Parameter können durch n andere gleichgeltende Parameter erſetzt werden, wovon drei p, q, α die Lage, und die n—3 übrigen a, b, c . . . die Form und Dimenſionen der Curve beſtimmen (§. 48), ſo daß man eine Gleichung:

$$f(x, y, a, b, c \ldots) = o \qquad (5)$$

erhält, welche n—3 Parameter enthält, und alle Curven der Gattung, aber in beſondern Lagen, ausdrückt. Gewöhnlich erhält man dieſe Gleichung direkt und vor der allgemeinen Gleichung.

Wenn alle Parameter a, b, . . . Längen ſind, ſo iſt die Gleichung (5) nothwendig homogen in Bezug auf x, y, a, b, . . .

Wir wollen die den Werthen $a_0, b_0, \ldots$ der Parameter entsprechende Curve S_0 oder $f(x, y, a_0, b_0, \ldots) = 0$ betrachten, so sind alle mit S_0 homothetischen Curven enthalten in der Gleichung:

$$f(kx, ky, a_0, b_0, \ldots) = 0$$

oder wenn man setzt:

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{b'}{b_0} = \ldots \frac{1}{k}$$

in der Gleichung:

$$f(kx, ky, ka', kb', \ldots) = 0,$$

und wegen der Homogeneität in:

$$f(x, y, a', b', \ldots) = 0. \qquad (6)$$

Die durch die Gleichung (6) gegebenen Curven sind offenbar in der Gleichung (5) enthalten. Jede Curve, welche der Curve S_0 ähnlich ist, ist also von derselben Gattung und ihre linearen Parameter sind denen der ersten proportional; und umgekehrt ꝛc. ꝛc.

3) Zuweilen wird eine Figur nicht blos durch Längen, sondern auch durch Winkel und Verhältnisse bestimmt, und zur Aehnlichkeit wird alsdann erfordert, daß diese Winkel und Verhältnisse gleich sind. — Wenn also die Figuren einer Gattung durch eine gewisse Anzahl von Parametern bestimmt werden, welche theils Linien, theils Winkel und Zahlen sind; so müssen, wenn zwei Figuren dieser Gattung ähnlich sein sollen, die Linien proportional und die Winkel und Zahlen gleich sein.

4) Wenn zur Bestimmung einer Figur, nach Form und Größe und abgesehen von der Lage, nur eine Länge erfordert wird; so sind alle Curven der Gattung einander ähnlich. — Es sind also alle Kreise, alle Parabeln, ꝛc. einander ähnlich, weil ein Kreis durch seinen Halbmesser, die Parabel durch den Abstand ihres Poles von der Richtlinie, ꝛc. bestimmt wird.

Da eine Ellipse und Hyperbel nach der ersten Definition (§. 6) durch die gegenseitige Entfernung 2c der Pole O,O′ (Fig. 8 u. 9) und durch die Summe, oder Differenz 2a der Radienvectoren bestimmt wird; so sind zwei Ellipsen, oder Hyperbeln einander ähnlich, wenn die Summe, oder Differenz der Radienvectoren dem Abstande der Pole proportional ist, oder wenn die Axen proportional sind, wie auch aus §. 109 folgt. Hyperbeln sind also ein-

ander ähnlich, wenn ihre Asymptoten denselben Winkel mit einander bilden.

5) Wenn $f(\rho, \vartheta) = 0$ die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten ist, so ist die Gleichung der homothetischen Curven, wenn der Pol der Mittelpunkt der Homothetie ist, folgende:

$$f(k\rho, \vartheta) = 0.$$

Hiernach sind alle Epicycloiden und Cissoiden einander ähnlich. — Hat man die logarithmische Spirale $\rho = a^{\vartheta}$, wo a positiv ist; so ist die Gleichung der ähnlichen Spiralen:

$$k\rho = a^{\vartheta} \text{ oder } \rho = \frac{1}{k} a^{\vartheta},$$

und wenn man $k = a^{\alpha}$ setzt:

$$\rho = a^{\vartheta - \alpha}.$$

Diese letzte Gleichung drückt die gegebene Spirale selbst aus, wenn die Polarare um den Winkel α gedrehet wird. Alle ähnlichen Curven einer logarithmischen Spirale sind dieser also selbst gleich, oder mit andern Worten: zwei logarithmische Spiralen können einander nicht ähnlich sein.

Fünfzehntes Kapitel.

Construction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen.

§. 111.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen ist:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

und enthält 5 willkürliche Parameter, nämlich die Verhältnisse von fünf ihrer Coefficienten zu dem sechsten. — Wenn C nicht $= 0$ ist, so kann man die Gleichung (1) nach y auflösen, wodurch man erhält:

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}}{2C},$$

wenn man setzt:

$$M = B^2 - 4AC,\ N = BE - 2CD,\ P = E^2 - 4CF.$$

Die Gerade:

$$y = -\frac{B}{2C}x - \frac{E}{2C}$$

iſt ein Durchmeſſer der Curve, weil ſie alle zu der Axe der y parallele Sehnen halbirt (§. 96), und um zwei Punkte der Curve zu erhalten, muß man für irgend einen Werth von x von dieſem Durchmeſſer aus in der Richtung der Ordinaten auf beiden Seiten eine Länge:

$$z = \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$$

nehmen. — Es handelt ſich alſo zunächſt um die Unterſuchung des Trinomes:

$$Mx^2 + 2Nx + P,$$

wobei mehrere Fälle zu unterſcheiden ſind.

§. 112.

Ellipſen.

Erſter Fall: $M = B^2 - 4AC < 0$. — Dieſer Fall zerfällt ſeinerſeits wieder in 3 Fälle:

1) Es iſt $N^2 - MP > 0$. — Alsdann ſind die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0$$

reell und ungleich. Bezeichnet x' die kleinſte und x'' die größte dieſer Wurzeln, ſo iſt das Trinom auch:

$$M(x - x')(x - x''),$$

alſo poſitiv und z reell für alle zwiſchen x' und x'' liegende Werthe von x, und negativ, folglich z imaginär für jeden Werth von x, welcher $< x'$ und $> x''$ iſt.

Zieht man alſo in den Abſtänden $OP = x'$, $OP' = x''$ (Fig. 142) zu der Axe der y zwei Parallelen AP, A'P', ſo liegt die Curve zwiſchen dieſen Parallelen. — Da in dem poſitiven veränderlichen Producte $(x - x')(x'' - x)$ die Summe der Factoren conſtant und gleich $x'' - x'$ iſt, ſo iſt dieſes Produkt, und folglich z ein Maximum, wenn die beiden Factoren einander gleich ſind, d. h. wenn $x = \frac{x' + x''}{2}$ iſt, und dieſes Maximum von z iſt:

$$\frac{(x'' - x')\sqrt{-M}}{4}.$$

Es sei Q die Mitte von PP', und man nehme:

$$CB = CB' = \frac{(x'' - x')\sqrt{-M}}{4},$$

so sind B, B' zwei Punkte der Curve, und wenn man durch diese Punkte Parallelen zu dem Durchmesser zieht; so wird die Curve von dem Parallelogramme DEFG umschlossen; sie geht durch die Punkte A, A', weil für $x = x'$ und $x = x''$ offenbar $z = o$ ist, und sie ist eine convexe Curve, weil sie von einer beliebigen Geraden nicht in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann.

Diese geschlossene convexe Curve ist eine Ellipse (§. 15).

2) Es ist $N^2 - MP = o$. — Alsdann ist $x' = x'' = -\frac{N}{M}$, und $z = \frac{x - x'}{2C}\sqrt{M}$ ist stets imaginär, ausgenommen für $x = x'$, wo $z = o$ ist, und die Curve sich auf den Punkt C reducirt. — Die Gleichung (1) läßt sich in diesem Falle auf folgende Form bringen:

$$(2Cy + Bx + E)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 = o,$$

und da $M < o$ ist; so ist der erste Theil derselben die Summe zweier Quadrate, welche nur dann $= o$ werden kann, wenn jedes einzelne Quadrat $= o$ wird, was den Durchschnittspunkt C des Durchmessers mit der Geraden $x + \frac{N}{M} = o$ gibt.

3) Es ist $N^2 - MP < o$. — Setzt man $\frac{MP - N^2}{M^2} = k^2$, so kann man das Trinom auf die Form:

$$M\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + k^2\right]$$

bringen. Das Trinom ist also stets negativ, folglich z stets imaginär, und die Gleichung (1) hat keine geometrische Bedeutung.

In diesem Falle ist der erste Theil der Gleichung (1) die Summe dreier Quadrate:

$$(2Cy + Bx + E)^2 - M\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP - N^2}{M^2}\right]$$

und kann für kein Wertheſystem von x und y verschwinden.

§. 113.

Hyperbeln.

Zweiter Fall. — Es ist $M = B^2 - 4AC > o$. Auch dieser Fall zerfällt in drei andere:

1) Es ist $N^2 - MP > o$. — Alsdann ist das Trinom $M(x - x')(x - x'')$ positiv, folglich z reell von $x = x''$ bis $x = +\infty$ und von $x = x'$ bis $x = -\infty$ reell und wächst von o bis ∞. Es gibt folglich zwei doppelte unendliche Curvenzweige, wovon der eine zur Rechten von A'P' (Fig. 143), und der andere zur Linken von AP liegt.

2) Es ist $N^2 - MP < o$. — Alsdann ist, wenn $\frac{MP - N^2}{M^2} = k^2$ gesetzt wird:

$$z = \frac{1}{2C}\sqrt{M\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + k^2\right]};$$

folglich ist z für alle Werthe von x reell und kann niemals verschwinden. Für $x = -\frac{N}{M}$ hat man das Minimum $z = \frac{k\sqrt{M}}{2C}$. Nimmt man $OQ = -\frac{N}{M}$ (Fig. 144) und von dem Durchmesser aus:

$$CB = CB' = \frac{k\sqrt{M}}{2C},$$

so sind B, B' zwei Punkte der Curve, und wenn man durch diese beiden Punkte Parallelen zu dem Durchmesser zieht; so besteht die Curve aus zwei unendlichen Zweigen, wovon der eine über der obern und der andere unter der untern Parallele liegt. Die in den beiden vorhergehenden Fällen erhaltene Curve ist eine Hyperbel (§. 15).

3) Es ist $N^2 - MP = o$. Alsdann ist:

$$z = \frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x - \frac{N}{M}\right),$$

$$y = -\frac{B \mp \sqrt{M}}{2C}x - \frac{D \pm \frac{N}{\sqrt{M}}}{2C}.$$

Diese letzte Gleichung drückt zwei Gerade aus, welche sich in einem Punkte C des Durchmessers schneiden, weil die Summe der beiden letzten Gleichungen die Gleichung des Durchmessers gibt.

Uebrigens läßt ſich die Gleichung (1) in dem gegenwärtigen Falle folgendermaßen zerlegen:

$$\left[2Cy+Bx+E-\sqrt{M}\left(x-\frac{N}{M}\right)\right]\left[2Cy+Bx+E+\sqrt{M}\left(x-\frac{N}{M}\right)\right]=0,$$

und man kann die dadurch ausgedrückten beiden Geraden als die Grenze einer Hyperbel betrachten. Denn wenn $N^2 - MP$ gegen Null convergirt, ſo nähern ſich die beiden Punkte A und A′ (Fig. 143) oder B und B′ (Fig. 144) einander, und die beiden Hyperbelzweige convergiren gegen die Schenkel zweier Scheitelwinkel.

§. 114.

Parabeln.

Dritter Fall. — Es iſt $M = B^2 - 4AC = 0$; folglich:

$$z = \frac{1}{2C}\sqrt{2Nx + P}.$$

1) Es iſt $N > 0$, folglich, wenn $x' = -\frac{P}{2N}$ geſetzt wird:

$$z = \frac{1}{2C}\sqrt{2N(x-x')},$$

und mithin iſt z für alle größern Werthe von x als x′ reell. — Nimmt man $OP = x'$ (Fig. 146) und zieht zu der Axe der y die Parallele PA; ſo beſteht die Curve aus einem doppelten unendlichen Zweige, welcher zur Rechten dieſer Parallele liegt.

2) Es iſt $N < 0$. Alsdann iſt z für alle kleinern Werthe von x als x′ reell, und die Curve beſteht wieder aus einem doppelten unendlichen Zweige, welcher aber zur Linken der Parallele PA liegt. — Dieſe und die vorhergehende Curve iſt eine Parabel (§. 15).

3) Es iſt $N = 0$. — Alsdann iſt $z = \frac{\sqrt{P}}{2C}$, $y = -\frac{B}{2C}x \pm \frac{\sqrt{P}}{2C}$, und wenn $P > 0$ iſt; ſo hat man zwei von dem Durchmeſſer gleichweit entfernte Parallelen zu demſelben. — Wenn $P = 0$ iſt, ſo fallen dieſe beiden Parallelen in eine zuſammen, und der erſte Theil der Gleichung iſt in dieſem Falle ein vollſtändiges Quadrat:

$$(2Cy + Bx + E)^2.$$

Wenn endlich $P < 0$ iſt, ſo iſt z imaginär.

Nach der vorhergehenden Unterſuchung hat man alſo folgende Ueberſicht:

$$B^2 - 4AC < o \begin{cases} N^2 - MP > o, \text{ Ellipse} \\ N^2 - MP = o, \text{ ein Punkt} \\ N^2 - MP < o, \text{ nichts} \end{cases} \Big\} \text{Ellipsengattung.}$$

$$B^2 - 4AC > o \begin{cases} N^2 - MP > o \\ N^2 - MP < o \end{cases} \text{Hyperbel} \quad \Big| \quad N^2 - MP = o, \text{ zwei sich schneidende Gerade} \Big\} \text{Hyperbelgattung.}$$

$$B^2 - 4AC = o \begin{cases} N > o \\ N < o \end{cases} \text{Parabel} \quad \Big| \quad N = o \begin{cases} P > o \text{ zwei parallele Gerade} \\ P = o \text{ eine Gerade} \\ P < o \text{ nichts} \end{cases} \Big\} \text{Parabelgattung.}$$

Wenn zu gleicher Zeit $A = o$, $C = o$ ist, so reducirt sich die Gleichung (1) auf:

$$Bxy + Dx + Ey + F = o, \qquad (2)$$

oder:

$$y = -\frac{Dx + F}{Bx + E} = b \cdot \frac{x - c}{x - a} = b \cdot \frac{1 - \frac{c}{x}}{1 - \frac{a}{x}}.$$

Um die Begriffe zu fixiren, sei $b > o$, $c < a$. Aendert sich x von a bis $+\infty$, so ändert sich y von $+\infty$ bis b, wodurch man den Curvenzweig ACB (Fig. 145) erhält, zu welchem die Geraden AA_1, BB_1, deren Gleichungen $x = a$, $y = b$ sind, Asymptoten bilden. — Wenn sich x von a bis $-\infty$ ändert, so ändert sich y von $-\infty$ bis b, welches den Zweig $A_1 C_1 B_1$ gibt, der dieselben Geraden zu Asymptoten hat. Uebrigens genügen in diesem besondern Falle die Coefficienten der Gleichung der den Hyperbeln entsprechenden Bedingung $B^2 - 4AC > o$.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen drückt also drei Curvengattungen aus: 1) die Ellipsengattung, worin als besonderer Fall ein Punkt vorkommt; 2) die Hyperbelgattung, welche als besondern Fall zwei sich schneidende Gerade enthält, und 3) die Parabelgattung, welche als besondere Fälle zwei parallele Gerade, oder eine Gerade unter sich begreift.

§. 115.

Tangenten.

Wenn man auf die Gleichung (1) die Methode der Tangenten anwendet, ſo findet man:

$$I = -\frac{2Ax + By + D}{2Cy + Bx + E} = -\frac{B}{2C} \cdot \frac{y + \frac{2Ax + D}{B}}{y + \frac{Bx + E}{2C}}.$$

In den Punkten A, A′ (Fig. 142), wo die Curve den Durchmeſſer ſchneidet, iſt der Nenner des Ausdruckes von I gleich Null, alſo $I = \infty$ und die Tangente parallel zur Axe der y.

In den Punkten B, B′ iſt:

$$\frac{2Ax + D}{B} = \frac{Bx + E}{2C} = o, \text{ alſo } I = -\frac{B}{2C};$$

folglich iſt die Tangente in dieſen Punkten zum Durchmeſſer parallel.

Aſymptoten. — Die früher auseinandergeſetzte Methode der Aſymptoten gibt:

$$\left.\begin{aligned} Cc^2 + Bc + A &= o \\ (2Cc + B)d + Ec + D &= o \end{aligned}\right\} \text{folglich:} \quad \begin{aligned} c &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}, \\ d &= -\frac{E}{2C} \pm \frac{BE - 2CD}{2C\sqrt{B^2 - 4AC}}. \end{aligned}$$

Wenn $B^2 - 4AC < o$ iſt, ſo iſt c imaginär, und wenn $B^2 - 4AC = o$ iſt, ſo iſt $d = \infty$. Die Parabel hat alſo keine Aſymptote, und folglich iſt die Hyperbel die einzige Curve des zweiten Grades, welche Aſymptoten hat, und zwar zwei. — Bildet man die halbe Summe der Aſymptotengleichungen, ſo erhält man die Gleichung des Durchmeſſers, und mithin ſchneiden ſich die Aſymptoten auf dem Durchmeſſer. — Zieht man dieſelben Gleichungen von einander ab, ſo erhält man:

$$x = -\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC},$$

und folglich ſchneiden ſich die Aſymptoten in dem Punkte C.

Wenn zugleich $B^2 - 4AC = o$, $BE - 2CD = N = o$ iſt, ſo erſcheint d unter der unbeſtimmten Form $\frac{o}{o}$, und in dieſem Falle wird d durch die Gleichung des zweiten Grades gegeben:

$$Cd^2 + Ed + F = o,$$

woraus folgt:

$$d = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} = \frac{-E \pm \sqrt{P}}{2C}.$$

Außerdem iſt $c = -\frac{B}{2C}$, ſo daß man zwei parallele Aſymptoten hat, welche nichts anders ſind, als die in dieſem Falle durch die Gleichung des zweiten Grades ausgedrückten beiden Geraden.

Uebungsaufgaben.

1) Es ſind zwei Punkte A, B gegeben, durch welche zwei bewegliche Gerade AM, BM ſo gehen, daß der Winkel MAB ſtets das Doppelte des Winkels MBA iſt; man ſoll den Ort des Durchſchnittspunktes M finden.

2) Man ſoll den Ort der Mittelpunkte der Kreiſe finden, welche auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels gegebene Längen abſchneiden.

3) Man ſoll die durch die folgenden Gleichungen ausgedrückten Curven conſtruiren:

1) $3x^2 + xy + y^2 + 2x + 5 = o$,
2) $x^2 + 3xy - 2x = o$,
3) $2x^2 + xy + y^2 + 3x + 2y + 2 = o$,
4) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 7 = o$,
5) $xy + 2x - 5y = o$,
6) $x^2 + xy + 3y^2 + 2y + 4 = o$,
7) $2y^2 + 7xy + 3x^2 - 3y - x - 2 = o$,
8) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y + 1 = o$,
9) $y^2 + xy + x^2 + 2x + 2y + 6 = o$.
10) $y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{17}{16}x^2 - 4y + 4x - 6 = o$, Ellipſe (Fig. 147),
11) $y^2 + 2xy + 5x^2 - 4x = o$, Ellipſe (Fig. 148),
12) $y^2 - 2xy + 6x^2 - 2y - 28x + 46 = o$, Punkt ($x=3, y=4$), (Fig. 149),
13) $x^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 3 = o$, Nichts,
14) $x^2 + y^2 - 4y + 2x = o$, Kreis (Fig. 150),
15) $y^2 + xy - 2x^2 - 2y - 2x + 3 = o$, Hyperbel (Fig. 151),
16) $y^2 - 2xy - 2y - 2x - 4 = o$, Hyperbel (Fig. 152),
17) $y^2 - 2xy - 2y + 4x = o$, zwei ſich ſchneidende Gerade,
18) $x^2 - 2xy - 2x + 4y - 1 = o$, Hyperbel (Fig. 153),
19) $x^2 + 3xy + 2y + 2x + \frac{8}{9} = o$, zwei Gerade BC, DE (Fig. 154),

20) $xy + 2y + 3x - 2 = o$, Hyperbel (Fig. 155),
21) $y^2 + 2xy + x^2 + 4y + 3x + 3 = o$, Parabel (Fig. 156),
22) $y^2 + 2xy + x^2 - 4y - 3x + 4 = o$, Parabel (Fig. 157),
23) $x^2 - 3x + 2y + 1 = o$, Parabel (Fig. 158),
24) $y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 2x - 3 = o$, zwei Parallelen,
25) $y^2 - 2xy + x^2 - 2y + 2x + 1 = o$, eine Gerade,
26) $y^2 + 2xy + x^2 + y + x + 1 = o$, Nichts.

Zur nähern Erläuterung des Verfahrens soll wenigstens eine dieſer Gleichungen, z. B. 10 conſtruirt werden. — Nach der Ueberſicht in §. 114 drückt dieſe Gleichung eine Ellipſe aus, und wenn man ſie nach y auflöſ't; ſo erhält man:

$$y = \tfrac{1}{2}x + 2 \pm \sqrt{-x^2 - 3x + 10}.$$

Die Gleichung des Durchmeſſers iſt alſo:

$$y = \tfrac{1}{2}x + 2.$$

Sezt man darin $x = o$, ſo erhält man $y = 2$ und für $y = o$ ergibt ſich daraus $x = -8$. Nimmt man alſo auf den Coordinatenaren $CD = 2$ und $CD' = 8$ (Fig. 139), ſo iſt die Lage des Durchmeſſers beſtimmt. — Sezt man weiter die Größe unter dem Wurzelzeichen $= o$, ſo hat man:

$$-x^2 - 3x + 10 = o, \text{ alſo } x = 2 \text{ und } x = -5.$$

Für dieſe Werthe von x iſt alſo $z = o$ und die Curve ſchneidet den Durchmeſſer in den beiden Punkten H, H', für welche $x = 2$ und $x = -5$ iſt.

Die Größe unter dem Wurzelzeichen iſt mithin:

$$z = \sqrt{(2 - x)(x + 5)}.$$

Von $x = o$ bis $x = 2$ iſt alſo z reell; für $x = o$ iſt $z = \pm\sqrt{10}$ und für $x = 2$ iſt $z = o$. Nimmt man folglich $DF = DF' = \sqrt{10}$ und läßt x ſich von o bis 2 ſtetig ändern, ſo erhält man den Curvenbogen FHF'. Für $x > 2$ wird z imaginär, und folglich hat die Curve jenſeits der Geraden HB keinen Punkt. — Um die negativen Abſciſſen entſprechenden Werthe von z zu erhalten, muß man x in $-x$ in dem Ausdrucke von z umſetzen, wodurch man erhält:

$$z = \sqrt{(2 + x)(5 - x)}.$$

Von $x = o$ bis $x = 5$ iſt alſo z reell, und für $x > 5$ imaginär. Die Curve hat alſo dieſſeits der Geraden H'B' keinen Punkt, und wenn man in dem letzten Ausdrucke von z die Abſciſſe

x ſich von o bis 5 ſtetig ändern läßt; ſo erhält man den Curvenbogen FH'F'.

Die Grenzen der Curve parallel zu dem Durchmeſſer findet man nach §. 112, 1) $CG = CG' = \frac{7}{2}$ und $OP = -\frac{3}{2}$. Zieht man alſo die Parallelen GK, G'K' zu dem Durchmeſſer HH', ſo iſt die Curve in das dadurch entſtehende Parallelogramm eingeſchloſſen.

Sechzehntes Kapitel.

Reduction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen.

§. 116.

Statt die allgemeine Gleichung:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o \qquad (1)$$

unmittelbar zu conſtruiren, wie wir im Vorhergehenden gethan haben, kann man dieſelbe zuvor durch Coordinatenverwandlung vereinfachen (§. 48). Es ſeien OX, OY die feſten rechtwinkligen Aren, und wir wollen die Curve auf die neuen rechtwinkligen Aren OX_1, OY_1 beziehen, welche man erhält, wenn man die erſten um den Winkel α drehet, und zu dem Zwecke die Ausdrücke:

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

in die Gleichung (1) ſetzen; ſo ergibt ſich:

$$(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha)x^2{}_1$$
$$+ \big(2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\big)x_1y_1$$
$$+ (C\cos^2\alpha + A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha)y^2{}_1 + D_1x + E_1y_1 + F = o.$$

Wir wollen nun das Glied mit $x_1 y_1$ fortzuſchaffen ſuchen, und zu dem Zwecke ſetzen:

$$2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = o,$$

ſo folgt daraus:

$$\text{tang}\, 2\alpha = \frac{B}{A-C}.$$

Dieſe Beſtimmung des Winkels α iſt alſo immer möglich, und die Gleichung der Curve in Beziehung auf die neuen Aren iſt:

$$Mx^2{}_1 + Ny^2{}_1 + D_1x_1 + E_1y_1 + F = o, \qquad (2)$$

wo

$$M = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$N = C\cos^2\alpha + A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha$$

gesetzt ist. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$M + N = A + C,$$
$$M - N = (A - C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha = \pm\sqrt{B^2 + (A-C)^2},$$
$$4MN = (M+N)^2 - (M-N)^2 = 4AC - B^2.$$

Hiernach sind also M und N die Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$u^2 - (A+C)u + \frac{4AC - B^2}{4} = 0.$$

§. 117.

Verlegen wir jetzt den Anfangspunkt O in den Punkt O′ oder (p, q) und setzen zu dem Behufe resp. $p + x'$, $q + y'$ statt x_1, y_1 in (2); so ergibt sich:

$$Mx'^2 + Ny'^2 + (2Mp + D_1)x' + (2Nq + E_1)y' + H = 0.$$

Sollen die Glieder mit x', y' aus der Gleichung verschwinden, so muß sein:

$$2Mp + D_1 = 0, \quad 2Nq + E_1 = 0$$

folglich:

$$p = -\frac{D_1}{2M} \qquad q = -\frac{E_1}{2N},$$

was voraussetzt, daß weder $M = 0$, noch $N = 0$ ist. Die Gleichung wird alsdann:

$$Mx'^2 + Ny'^2 + H = 0. \qquad (3)$$

Uebrigens ist diese Transformation weiter nichts, als die Verlegung des Anfangspunktes in den Mittelpunkt der Curve. — Wenn eine der Größen M, N, z. B. $M = 0$ ist, so kann man nicht beide Glieder des ersten Grades fortschaffen, und die Curve hat keinen Mittelpunkt; aber wohl kann man das Glied mit y' entfernen, wenn man $q = -\frac{E_1}{2N}$ setzt. Auch das constante Glied $H = Nq^2 + D_1p + E_1q + F$ kann weggeschafft werden, wofern nicht $D_1 = 0$ ist. Im entgegengesetzten Falle $D = 0$ enthielte die Gleichung nur die eine Veränderliche y, und drückte folglich im Allgemeinen zwei zu der Axe OY_1 parallele Gerade aus.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Ver-

änderlichen enthält also zwei Klassen von Curven, nämlich 1) Curven, welche einen Mittelpunkt haben und durch die Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 + H = 0 \qquad (3)$$

ausgedrückt werden, und 2) Curven, welche keinen Mittelpunkt haben und in der Gleichung:

$$Ny^2 + Px = 0 \qquad (4)$$

enthalten sind.

§. 118.

Wir hätten die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen unmittelbar in die beiden Formen (3) und (4) zerlegen können; und in der That haben wir in der Theorie der Mittelpunkte und der Are gesehen, daß die allgemeine Gleichung zwei Klassen von Curven enthält, nämlich Curven mit einem Mittelpunkte und zwei rechtwinkligen Aren, und Curven ohne Mittelpunkt und mit einer Are. — Wenn man bei der ersten Klasse von Curven die beiden Aren zu Coordinatenaren nimmt, so darf die Gleichung der Curve nur gerade Potenzen von x und y enthalten, und folglich werden diese Curven nothwendig durch die Form (3) ausgedrückt. — Nimmt man bei der zweiten Klasse den Scheitel zum Anfangspunkte und die Are der Curve zur Are der x, so darf die Gleichung der Curve weder ein constantes Glied, noch ungerade Potenzen von y enthalten, und da außerdem $B^2 - 4AC = 0$ ist; so ist diese Klasse von Curven in der Form (4) enthalten.

Das Merkmal der Curven der ersten Klasse besteht darin: daß keine der Größen M, N Null sei, oder mit andern Worten: daß ihr Produkt $B^2 - 4AC$ von Null verschieden sei. Das Merkmal der Curven der zweiten Klasse dagegen ist: daß eine der Größen M, N Null sei, d. h. $B^2 - 4AC = 0$.

§. 118 a.

Construction der Curven des zweiten Grades. Erste Methode.

Ellipse und Hyperbel. — Bei der vorhergehenden Reduction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades wurde zuerst das Glied mit xy fortgeschafft, indem die Richtung der Coordinatenaren so verändert wurde, daß die Are der x der Are der Curve parallel war, und dann wurde der Anfangspunkt der Coordinaten im Falle der Ellipse und Hyperbel in den Mittelpunkt, und im Falle der Parabel in den Scheitel der Curve verlegt. — Die erste Re-

duction ist immer möglich, weshalb sie auch zuerst vorgenommen wurde; aber wenn die Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, so ist es einfacher, zuerst den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Curve zu verlegen, wodurch die Glieder mit x und y verschwinden, und dann die Coordinatenaxen so um den Mittelpunkt zu drehen, daß sie zu den Axen der Curve parallel werden, wodurch das Glied mit xy verschwindet.

Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt C oder (p, q) verlegt wird, so geht die Gleichung:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o \qquad (1)$$

in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + (2Ap + Bq + D)x_1 + (Bp + 2Cq + E)y_1 \\ (Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F) = o, \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

deren Glieder des ersten Grades verschwinden, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} 2Ap + Bq + D = o, \\ Bp + 2Cq + E = o, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

woraus folgt:

$$p = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

$$q = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Diese Werthe von p, q sind endlich und bestimmt, weil der Nenner $B^2 - 4AC$ nicht $= o$ ist. — Setzt man:

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F = H,$$

so reducirt sich die Gleichung (1') der Curve auf:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + H = o. \qquad (3)$$

Man bemerkt leicht: daß die ersten Theile der Gleichungen (2), welche die Coordinaten p, q des Mittelpunktes bestimmen, nichts anders sind, als die partiellen Ableitungen nach x und y des ersten Theiles der Gleichung (1), wenn für x, y resp. p, q gesetzt wird, und daß die constante Größe H erhalten wird, wenn man in den ersten Theil der Gleichung (1) für x, y resp. p, q substituirt (§. 94).

Drehet man nun die Coordinatenaxen und den Mittelpunkt C um den Winkel α, so hat man (§. 116):

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B}{A - C}, \qquad (4)$$

und wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} M = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha, \\ N = C\cos^2\alpha + A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} M+N &= A+C, \\ M-N &= \pm\sqrt{B^2-(A-C)^2}; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

so reducirt sich die Gleichung der Curve auf:

$$Mx'^2+Ny'^2+H=0. \qquad (7)$$

Beispiel 1. Die gegebene Gleichung sei:

$$2x^2-3xy+3y^2+x-7y+1=0.$$

Die entsprechende Curve ist eine Ellipse, weil die Größe B^2-4AC negativ ist. Zur Bestimmung des Mittelpunktes (p, q) hat man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4p-3q+1 &= 0, \\ -3p+6q-7 &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$p=1,\ q=\frac{5}{3},$$

so daß man den Mittelpunkt C (Fig. 160a) leicht construiren kann.

Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tang} 2\alpha=\frac{B}{A-C}=3$$

folgt:

$$2\alpha=71°33'54'',\ \text{also}\ \alpha=35°46'57''.$$

Zieht man nun durch den Mittelpunkt C die Gerade CX', welche mit OX den Winkel α bildet; so ist diese Gerade die neue Axe der x'. Ferner ist nach den Gleichungen (5) offenbar $N>M$ und:

$$N+M=5,\ N-M=\sqrt{10}=3,162;$$

folglich:

$$N=4,081,\ M=0,919\ \text{und}\ H=-\frac{13}{3}.$$

Die Gleichung der Curve in Beziehung auf ihre Axen ist also:

$$0,919\,x'^2+4,081\,y'^2=4,333,$$

und die Längen ihrer halben Axen a, b sind:

$$a=2,171,\ b=1,030.$$

Beispiel 2. Die gegebene Gleichung sei:

$$4x^2-10xy-3y^2+20x=0,$$

so ist die zugehörige Curve eine Hyperbel, weil die Größe B^2-4AC positiv ist. — Zur Bestimmung des Mittelpunktes (p, q) hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 8p-10q+20 &= 0, \\ 10p+6q &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$p = -\frac{30}{37} = -0,8108,\quad q = \frac{30 \cdot 5}{37 \cdot 3} = 1,3514.$$

Ferner ist:

$$H = -\frac{300}{37} = -8,1081,$$

$\text{tang}\,2\alpha = -\frac{10}{7}$, also $2\alpha = 124°59'21''$ und $\alpha = 65°29'45''$,

$$M + N = 1,\quad M - N = \sqrt{149} = 13,2065,$$

folglich:

$$M = 7,103,\quad N = -6,103.$$

Die Gleichung der auf ihre Axen bezogenen Hyperbel ist also:

$$7,103x'^2 - 6,103y'^2 = 8,108,$$

und die Längen ihrer Halbaxen a, b sind:

$$a = 1,068,\quad b = 1,153.$$

Beispiel 3. Die gegebene Gleichung sei:

$$8x^2 - 5xy + 5y - 1 = 0,$$

so ist die entsprechende Curve eine Hyperbel, für welche man hat:

$$p = 1,\quad q = \tfrac{1}{2},$$

$$N + M = 2,\quad N - M = \sqrt{29} = 5,385,$$

also: $N = 3,693,\quad M = -1,693,$

und ihre Gleichung in Bezug auf ihre Axen ist:

$$1,693x'^2 - 3,693y'^2 = 1.$$

Parabel. — Bei dieser Curve drehet man zuerst die Coordinatenaxen so um den Anfangspunkt, daß die Axe der x zu der Axe der Parabel parallel wird, damit das Glied mit xy verschwindet. — Zu dem Zwecke leitet man aus der Gleichung (4) folgende ab:

$$\text{tang}^2\alpha - 2\frac{C-A}{B}\,\text{tang}\,\alpha - 1 = 0,$$

deren beide Wurzeln wegen der Relation $B^2 - 4AC$ sind:

$$-\frac{2A}{B} \text{ oder } -\frac{B}{2C} \text{ und } \frac{2C}{B}.$$

Aber wegen der Relation $4MN = 4AC - B^2$ ist eine der beiden Größen M, N Null, und da das Glied mit x^2 verschwinden soll; so nimmt man die Wurzel, welche $M = 0$ macht, nämlich $-\frac{B}{2C}$, wie man leicht einsieht, wenn man bemerkt, daß:

$$M = C\cos^2\alpha\,(\text{tang}\,\alpha + \frac{B}{2C})^2.$$

Drehet man alſo die Coordinatenaxen um den durch die Relation:

$$\text{tang } \alpha = -\frac{B}{2C}$$

beſtimmten Winkel α, ſo wird die Gleichung der Curve:

$$(A+C)y^2{}_1 + \frac{(2CD-BE)\cos\alpha}{2C}x_1 + \frac{(2CE+BD)\cos\alpha}{2C}y_1 + F = o.$$

Verlegt man jetzt den Anfangspunkt in den Scheitel der Parabel, ſo verſchwindet das Glied mit y_1 und das conſtante Glied. Die Coordinaten des Scheitels erhält man, wenn man mit der letzten Gleichung ihre Ableitung nach y_1, d. h.:

$$2(A+C)y_1 + \frac{(2CE+BD)}{2C}\cos\alpha = o$$

verbindet, und die Gleichung der Parabel nimmt alsdann die Form:

$$y'^2 = 2px'$$

an.

Beiſpiel. Die gegebene Gleichung ſei:

$$-4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = o,$$

ſo gibt die Relation:

$$\text{tang } \alpha = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$

$$\alpha = 33°41'25''.$$

Drehet man die Coordinatenaxen durch dieſen Winkel um den Anfangspunkt, ſo wird die Gleichung der Curve:

$$13y^2{}_1 - 29{,}954x_1 + 19{,}969y_1 + 100 = o,$$

und ihre Ableitung nach y_1 iſt:

$$26y_1 + 19{,}969 = o.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen erhält man die Coordinaten des Scheitels:

$$x_1 = 3{,}082,\ y_1 = -0{,}768,$$

und wenn man den Anfangspunkt in dieſen Scheitel verlegt; ſo wird die Gleichung der Curve:

$$y'^2 = 2{,}304x'.$$

Zweite Methode.

Wenn man zuerſt die Coordinatenaxen um den Winkel α drehet, ſo verſchwindet das Glied Bxy der Gleichung (1) und ſie wird:

$$A'x^2{}_1 + C'y^2{}_1 + 2D'x_1 + 2E'y_1 + F = o. \qquad (8)$$

Umgekehrt, wenn man die Coordinatenaxen, worauf ſich die

Gleichung (8) bezieht, um den Winkel $-\alpha$ drehet; so muß (8) wieder in (1) übergehen. — Sezt man also in (8)

$$x_1 = x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y_1 = x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

so muß die dadurch entstehende Gleichung:

$$A'(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + C'(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^1$$
$$+ 2D'(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + 2E'(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) + F = o$$

mit (1) identisch sein. — Entwickelt man diese lezte Gleichung und sezt die Coefficienten von x^2, y^2, xy, x, y denen von x^2, y^2, xy, x, y in (1) gleich, indem man 2B, 2D, 2E resp. für B, D, E gesezt denkt; so erhält man folgende 5 Relationen:

$$A'\cos^2\alpha + C'\sin^2\alpha = A, \quad (9)$$
$$(A' - C')\sin\alpha\cos\alpha = B, \quad (10)$$
$$A'\sin^2\alpha + C'\cos^2\alpha = C, \quad (11)$$
$$D'\cos\alpha - E'\sin\alpha = D, \quad (12)$$
$$D'\sin\alpha + E\cos\alpha = E. \quad (13)$$

wovon die drei ersten die Unbekannten A', C', α und die zwei lezten die Unbekannten D', E' bestimmen.

Beispiel 1. Die gegebene Gleichung sei:

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12c\sqrt{2}\,y - 12c\sqrt{2}\,x = o,$$

so hat man die Gleichungen:

$$A'\cos^2\alpha + C'\sin^2\alpha = 5, \quad (1)$$
$$(A' - C')\sin\alpha\cos\alpha = 1, \quad (2)$$
$$A'\sin^2\alpha + C'\cos^2\alpha = 5, \quad (3)$$
$$D'\cos\alpha - E'\sin\alpha = -6c\sqrt{2}, \quad (4)$$
$$D'\sin\alpha + E'\cos\alpha = -6c\sqrt{2}. \quad (5)$$

Nun ist (1) — (3):

$$(A' - C')\cos 2\alpha = o$$

also: $2\alpha = 90^0$, $\alpha = 45^0$,

weil $A' - C'$ wegen (2) nicht $= o$ ist. — Die Gleichungen (1) und (2) werden also:

$$A' + C' = 10, \quad A' - C' = 2,$$

folglich: $A' = 6$, $C' = 4$.

Ferner werden die Gleichungen (4) und (5):

$$D' - E' = -12c, \quad D' + E' = -12c,$$

folglich: $D' = -12c$, $E' = o$.

Drehet man also die Coordinatenaren um den Winkel $= 45^0$, so geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$6x^2 + 4y^2 - 24cy = o$$

oder: $3x^2 + 2(y - 6c)^2 = 72c^2$,

und wenn man den Anfangspunkt in den Punkt (0,6c) verlegt:

$$\frac{x^2}{24c^2} + \frac{y^2}{36c^2} = 1.$$

Die der gegebenen Gleichung entsprechende Curve ist also eine Ellipse, deren Halbaxen $2c\sqrt{6}$ und $6c$ sind.

Beispiel 2. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^2 + 2xy - y^2 - 2cx + 2cy - 4c^2 = 0,$$

so ist:

$$A' \cos^2\alpha + C' \sin^2\alpha = 1, \quad (1)$$
$$(A' - C') \sin\alpha \cos\alpha = 1, \quad (2)$$
$$A' \sin^2\alpha + C' \cos^2\alpha = -1, \quad (3)$$
$$D' \cos\alpha - E' \sin\alpha = -c, \quad (4)$$
$$D' \sin\alpha + E' \cos\alpha = c. \quad (5)$$

Es ist (1) — (3):

$$(A' - C') \cos 2\alpha = 2, \quad (6)$$

und 2 (2) : (6) gibt:

$$\text{tang } 2\alpha = 1, \text{ also } 2\alpha = 45^0 \text{ und } \alpha = 22\tfrac{1}{2}^0.$$

Hiernach werden (6) und (1) + (3):

$$A' - C' = 2\sqrt{2}, \quad A' + C' = 0,$$

folglich:

$$A' = \sqrt{2}, \quad C' = -\sqrt{2}.$$

Drehet man also die Coordinatenaxen um einen Winkel $= 22\frac{1}{2}^0$ und setzt $D' = \sqrt{2}.h$, $E' = \sqrt{2}.k$, so geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$\sqrt{2}.x^2 - \sqrt{2}.y^2 + 2\sqrt{2}.hx + 2\sqrt{2}.ky - 4c^2 = 0$$

oder:

$$(x+h)^2 - (y-k)^2 = 2\sqrt{2}.c^2 + h^2 - k^2.$$

Nach (4) und (5) ist aber:

$$\sqrt{2}.h = -c(\cos\alpha - \sin\alpha), \sqrt{2}.k = c(\cos\alpha + \sin\alpha),$$

mithin:

$$2(h^2 - k^2) = c^2(-4\sin\alpha\cos\alpha) = -c^2\sqrt{2}.$$

Verlegt man also den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt (h, k), so wird die Gleichung der Curve:

$$x^2 - y^2 = \frac{3}{\sqrt{2}}c^2,$$

und drückt folglich eine Hyperbel aus.

Beispiel 3. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}.cx = 0,$$

ſo ergibt ſich ganz wie in Beiſpiel 1:

$$\alpha = 45°,\ A' + C' = 2,\ A' - C' = -2,$$

alſo:

$$A' = 0,\ C' = 2;$$

ferner:

$$D' - E' = -4c,\ D' + E' = 0,$$

mithin:

$$D'' = -2c,\ E' = 2c.$$

Drehet man alſo die Coordinatenaxen um den Winkel $= 45°$, ſo wird die gegebene Gleichung:

$$2y^2 - 4cx + 4cy = 0,$$

oder:

$$(y + c)^2 = 2c\left(x - \frac{c}{2}\right),$$

und wenn man den Anfangspunkt in den Punkt $\left(\frac{c}{2}, -c\right)$ verlegt:

$$y^2 = 2cx,$$

welche Gleichung offenbar eine Parabel ausdrückt.

Beiſpiel 4. Die gegebene Gleichung ſei:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2c^2 = 0,$$

ſo findet man:

$$\alpha = 45°,\ A' = 0,\ C' = 2,\ D' = 0,\ E' = 0.$$

Werden alſo die Coordinatenaxen um einen Winkel von 45° gedrehet, ſo wird die gegebene Gleichung:

$$y^2 - c^2 = 0 \text{ oder } (y - c)(y + c) = 0,$$

wodurch zwei parallele Gerade ausgedrückt werden, was auch unmittelbar aus der gegebenen Gleichung erhellet, wenn man ſie auf folgende Form bringt:

$$(x - y - c\sqrt{2})(x - y + c\sqrt{2}) = 0.$$

Siebzehntes Kapitel.

Conſtruction der reducirten Gleichungen des zweiten Grades.

A. Ellipſe.

§. 119.

Conſtruction der Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 + H = 0, \qquad (1)$$

wo M und N daſſelbe Zeichen, z. B. das Zeichen + haben.

Wenn $H > o$ ist, so kann der erste Theil der Gleichung (1) für keinen reellen Werth von x und y verschwinden; die Gleichung hat also keine geometrische Bedeutung.

Wenn $H = o$ ist, so geschieht der Gleichung (1) nur durch $x = o$, $y = o$ Genüge, und sie drückt folglich weiter nichts als den Anfangspunkt aus.

Wenn $H < o$ ist, und man setzt: $a = \sqrt{\frac{-H}{M}}$, $b = \sqrt{\frac{-H}{N}}$; so wird die Gleichung (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder: } a^2y^2 + b^2y^2 = a^2b^2. \quad (2)$$

Der Anfangspunkt ist der Mittelpunkt und die Coordinatenaxen sind Axen der Curve. Aus der für y aufgelöst'ten Gleichung:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (3)$$

erhellet, daß x sich von $-a$ bis $+a$ und y von $-b$ bis $+b$ ändert. Nimmt man also $OA = OA_1 = a$ und $OB = OB_1 = b$ (Fig. 159), so ist die Curve in dem Rechtecke EFGH enthalten und geht durch die Punkte A, A_1, B, B_1, welche die Scheitel der Curve heißen. Die Längen a und b heißen die Halbaxen, und zwar a die große und b die kleine Halbaxe. Die Curve ist eine Ellipse, welche in einen Kreis übergeht, wenn $a = b$ wird.

Die Gleichung des über AA_1 beschriebenen Kreises ist:

$$Y^2 + x^2 = a^2,$$

folglich wegen (3):

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a},$$

d. h. die Ordinate der Ellipse verhält sich zu der des Kreises wie $b : a$. Hieraus ergibt sich eine geometrische Construction der Punkte der Ellipse; denn beschreibt man auch um BB_1 als Durchmesser einen Kreis, zieht einen beliebigen Halbmesser, welcher die beiden concentrischen Kreise in P und Q schneidet, durch P eine Parallele zur Axe der y und durch Q eine solche zu der Axe der x; so ist der Durchschnittspunkt M dieser beiden Geraden ein Punkt der Ellipse.

§. 120.

Aus der Gleichung (3) folgt:

$$y : b = \sqrt{a^2 - x^2} : a,$$

und wenn man durch den Punkt M (Fig. 160) der Ellipse eine durch die beiden Axen begrenzte Gerade RS zieht; so hat man:

$$y : MR = SQ : MS$$

$$y : MR = \sqrt{\overline{MS}^2 - x^2} : MS.$$

Nimmt man also $MS = a$, so folgt $MR = b$, was ein Mittel an die Hand gibt, die Ellipse durch eine stetige Bewegung zu beschreiben. Wenn also die beiden Endpunkte einer Geraden von constanter Länge sich auf zwei rechtwinkligen Axen bewegen, so beschreibt ein Punkt M dieser Geraden eine Ellipse.

Man kann der Geraden auch die Lage $MR'S'$ geben; denn wenn $MS' = a$ ist, so ist $MR' = b$. Wenn sich also eine Gerade so bewegt: daß zwei ihrer Punkte auf zwei rechtwinkligen Geraden fortgleiten; so beschreibt ein beliebiger anderer Punkt dieser Geraden eine Ellipse, und die beiden Halbaxen derselben sind den Abständen des erzeugenden Punktes von den beiden ersten Punkten gleich.

Aus der Gleichung (3) folgt:

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

oder:

$$\frac{y^2}{(a-x)(a+x)} = \frac{b^2}{a^2};$$

mithin ist für einen beliebigen M (Fig. 159) der Ellipse:

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP \cdot A_1P_1} = \frac{b^2}{a^2},$$

d. h. das Quadrat der Ordinate steht zu dem Produkte aus den zugehörigen Abschnitten der großen Axe in einem constanten Verhältnisse.

Wenn man die Polarcoordinaten:

$$\rho \cos \omega, \ \rho \sin \omega$$

für x und y in die Gleichung der Ellipse setzt, so erhält man:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2},$$

oder wenn $a > b$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \omega.$$

Wenn sich also ω von o bis $\frac{\pi}{2}$ ändert, so ändert sich $\frac{1}{\rho^2}$ von $\frac{1}{a^2}$ bis $\frac{1}{b^2}$,

d. h. ρ nimmt von a bis b fortwährend ab, und folglich ist a das Maximum und b das Minimum von ρ.

§. 121.

Die Gleichung der Tangente in einem Punkte (x, y) der Ellipse ist:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

Wenn T (Fig. 159) der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe der x ist, so ist $OT = \frac{a^2}{x}$. Dieser Ausdruck von OT ist unabhängig von b und y, so daß, wenn man über A_1A verschiedene Ellipsen beschreibt, die Tangenten in den derselben Abscisse entsprechenden Punkten alle durch denselben Punkt T gehen. Unter diesen Ellipsen befindet sich auch ein Kreis, und der Punkt T wird bestimmt, wenn man an diesen Kreis eine Tangente zieht. Verbindet man alsdann T mit dem auf der Ellipse gegebenen Punkte, so hat man die Tangente an der Ellipse.

Soll man durch einen außerhalb der Ellipse gegebenen Punkt E (Fig. 167) Tangenten an diese Curve ziehen, so bestimme man für den über der großen Axe beschriebenen Kreis den correspondirenden Punkt F (indem man etwa BE und dann HD zieht), so daß man hat:

$$\frac{EG}{FG} = \frac{MP}{NP} = \frac{b}{a}.$$

Alsdann ziehe man von F aus zwei Tangenten an den Kreis und durch die correspondirenden Punkte M, M' von N, N' zwei Gerade von E aus; so hat man die beiden gesuchten Tangenten. — Soll man endlich an die Ellipse Tangenten ziehen, welche zu einer gegebenen Geraden OK (Fig. 167a) parallel sind, so construirt man die correspondirende Gerade OL von OK, zieht an den Kreis die beiden zu OL parallelen Tangenten NT, N'T' und dann TM, T'M'.

B. Hyperbel.

§. 122.

Construction der Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 + H = 0, \qquad (1)$$

wenn M und N entgegengesetzte Zeichen haben.

Wenn $H = o$ iſt, ſo gibt die Gleichung zwei durch den Anfangspunkt gehende Gerade:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{-N}{M}}.$$

Wenn H nicht $= o$ iſt, und z. B. das Zeichen von N hat, ſo kann man ſetzen:

$$a = \sqrt{\frac{-H}{M}}, \; b = \sqrt{\frac{H}{N}},$$

wodurch ſich die Gleichung (1) in folgende verwandelt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2. \quad (2)$$

Der Anfangspunkt iſt Mittelpunkt und die Coordinatenaxen ſind Axen der Curve. Aus der für y aufgelöſ'ten Gleichung:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (3)$$

erhellet: daß y für alle zwiſchen $+ a$ und $+ \infty$, ſo wie für alle zwiſchen $- a$ und $- \infty$ liegende Werthe von x reell iſt, und daß in jedem dieſer Intervalle der abſolute Werth von y von o bis ∞ wächſt. — Nimmt man alſo $OA = OA_1 = a$ (Fig. 162), ſo beſteht die Curve aus zwei unendlichen Zweigen, wovon der eine zur Rechten von A und der andere zur Linken von A_1 liegt. Die Curve iſt eine Hyperbel, A, A_1 ſind ihre Scheitel und a iſt ihre halbe reelle oder Queraxe. Wenn man auf der Axe der y die Länge $OB = OB' = b$ nimmt, ſo heißt BB' die imaginäre Axe der Hyperbel.

Für die durch die Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

ausgedrückte Hyperbel iſt BB' die reelle und AA_1 die imaginäre Axe. — Zwei Hyperbeln, welche ſo beſchaffen ſind, daß die reelle Axe der einen die imaginäre Axe der andern iſt, heißen conjugirte Hyperbeln.

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

oder:

$$\frac{y^2}{(x-a)(x+a)} = \frac{b^2}{a^2},$$

d. h.:

$$\frac{\overline{MP^2}}{AP \cdot A_1P} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Das Quadrat der Ordinate ſteht alſo zu dem Produkte der beiden entſprechenden Abſchnitte auf der Querare in einem conſtanten Verhältniſſe.

Zur Beſtimmung der Aſymptoten hat man $c = \pm\frac{b}{a}$, $d = o$. Die beiden conjugirten Hyperbeln haben dieſelben Aſymptoten:

$$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

welche die Diagonalen des über den Aren conſtruirten Rechteckes ſind. — Der Unterſchied zwiſchen der derſelben Abſciſſe entſprechenden Ordinate der Aſymptote und der Hyperbel wird durch:

$$\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

ausgedrückt, und da dieſe Größe poſitiv iſt; ſo folgt: daß der Hyperbelzweig AE unter der Aſymptote OG liegt. Der Zweig BH der conjugirten Hyperbel liegt dagegen über der Aſymptote.

Wenn man über derſelben reellen Are A_1A verſchiedene Hyperbeln beſchreibt, ſo ſtehen die derſelben Abſciſſe entſprechenden Ordinaten in einem conſtanten Verhältniſſe.

Die Gleichung der Tangente der Hyperbel iſt:

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1,$$

woraus $OT = \frac{a^2}{x}$ folgt. — Wenn alſo der Berührungspunkt M gegeben iſt, ſo erhält man den Punkt T, wo die Tangente die Are ſchneidet, wenn man zwiſchen $OA = a$ und $OP = x$ die mittlere Proportionale OT ſucht.

§. 123.

Aſymptoten als Coordinatenaren.

Wenn man die beiden Aſymptoten der Hyperbel als Coordinatenaren nimmt, ſo kann man a priori behaupten: daß die Gleichung der Curve von der Form $xy = m^2$ ſein wird. Denn da der Anfangspunkt Mittelpunkt der Curve iſt, ſo kann die Gleichung kein Glied vom erſten Grade enthalten; da ferner $y = \infty$ iſt für $x = o$, ſo kommt auch das Glied mit y^2 nicht in der Gleichung vor, und

da $x = \infty$ wird für $y = o$, so fehlt ebenso das Glied mit x^2; es bleiben also blos noch zwei Glieder, nämlich das mit xy und das constante Glied. Man sieht: daß dies nichts anders ist, als die in §. 48 angedeutete vollständige Reduction, welche in der Fortschaffung von 4 Parametern besteht.

Den Werth der Constante m^2 kann man leicht bestimmen. Denn wendet man die Gleichung $xy = m^2$ auf den Scheitel A (Fig 162 a) an, dessen Coordinaten einander gleich sind, nämlich OF=FA=OH; so hat man:

$$m^2 = OF \,.\, OH = \overline{OH}^2 = \frac{\overline{OG}^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}. \qquad (5)$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch durch Coordinatenverwandlung. Denn es seien OX', OY' zwei neue Axen, welche mit OX die Winkel α, β bilden, so hat man:

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta,$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke wird die Gleichung (2):

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^1}\right) x'^2 + \left(\frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2}\right) y'^2$$
$$+ 2\left(\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{a^2} - \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{b^2}\right) x'y' = 1.$$

Bestimmt man nun die Winkel α, β so, daß die Glieder mit x^2 und y^2 verschwinden, so hat man:

$$\text{tang}^2\beta = \text{tang}^2\alpha = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{tang}\,\beta = -\,\text{tang}\,\alpha = \frac{b}{a},$$

was darauf hinausläuft: daß man die Asymptote OG' (Fig. 162) zur Axe der x', und die Asymptote OG zur Axe der y' nimmt. — Die Gleichung der Curve reducirt sich alsdann auf:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}. \qquad (5)$$

Aus der Gleichung (5) erhellet: daß die Fläche des zwischen den beiden Asymptoten und den Coordinaten eines beliebigen Punktes M (Fig. 163) der Hyperbel liegenden Rechteckes OPMQ constant und zwar der Hälfte des Rechteckes aus den beiden Halbaxen gleich ist. — Denn wenn ϑ den Winkel bezeichnet, welchen

die beiden Asymptoten mit einander bilden, so ist diese Fläche $= xy \sin \vartheta = m^2 \sin \vartheta = \frac{ab}{2}$, weil $\sin \vartheta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ ist.

Aus der Gleichung (5) ergibt sich auch leicht: daß das Produkt der Abstände jedes Punktes der Hyperbel von den beiden Asymptoten constant ist.

Wenn ferner x, y; x', y' die Coordinaten der Punkte M, M' (Fig. 163) der Hyperbel sind, so ist die Gleichung der durch diese beiden Punkte gehenden Sekante MM':

$$Y - y = \frac{y' - y}{x' - x} (X - x),$$

oder wegen $x'y' = xy$:

$$Y - y = - \frac{y'}{x} (X - x). \qquad (6)$$

Wenn man in dieser Gleichung $X = o$ setzt, so ergibt sich daraus:

$$SQ = y' = M'P'.$$

Die beiden Dreiecke SMQ, M'P'R sind also einander gleich, und mithin MS = M'R. — Die zwischen der Hyperbel und den beiden Asymptoten liegenden beiden Theile einer Sekante sind also einander gleich, woraus als besonderer Fall folgt: daß die zwischen dem Berührungspunkte und den Asymptoten liegenden beiden Theile einer Tangente einander gleich sind. — Setzt man in der Gleichung (6), $y' = y$, so ist die Gleichung der Tangente:

$$Y - y = - \frac{y}{x} (X - x)$$

oder:

$$xY + yX = 2m^2. \qquad (7)$$

C. Parabel.

§. 124.

Construction der Gleichung:

$$Ny^2 + Px = o, \qquad (1)$$

oder wenn man $2p = - \frac{P}{N}$ setzt:

$$y^2 = 2px; \text{ also } y = \pm \sqrt{2px}. \qquad (2)$$

Die Axe der x ist eine Axe der Curve und der Anfangspunkt ein Scheitel. Wenn $p > o$ gesetzt wird, so ist y für alle po-

ſitiven Werthe von x reell, und wenn x ſich von o bis $+\infty$ ändert; ſo wächſt y dem abſoluten Werthe nach von o bis ∞. Da jedem Werthe von x zwei gleiche und entgegengeſetzte Werthe von y entſprechen, ſo beſteht die Curve aus einem unendlichen Zweige EOE_1 (Fig. 164) und wird Parabel genannt. — Die Länge p, welche die Form der Parabel beſtimmt, heißt der Parameter derſelben.

Nach der Gleichung (2) hat man:

$$\frac{y^2}{x} = \frac{\overline{PM}^2}{OP} = 2p,$$

d. h. die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich wie die zugehörigen Abſciſſen.

Die Gleichung ihrer Tangente iſt:

$$yY = p(X + x), \qquad (3)$$

woraus ſich für $Y = o$ die Länge $OT = X = -x$ ergibt, ſo daß ſich dieſe Tangente leicht conſtruiren läßt.

Die Gleichung der Normale iſt:

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

Setzt man darin $Y = o$, ſo erhält man für die Subnormale

$$PN = X - x = p.$$

§. 125.

Die Parabel als Grenze einer Ellipſe oder Hyperbel.

Wenn man den Scheitel A_r (Fig. 159) als Anfangspunkt nimmt, ſo wird die Gleichung der Ellipſe:

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

wo $p = \frac{b^2}{a}$, $q = -\frac{b^2}{a^2} = \frac{-p}{a}$ geſetzt iſt.

Wenn man den Scheitel A (Fig. 162) zum Anfangspunkte nimmt, ſo hat die Gleichung der Hyperbel dieſelbe Form, indem $p = \frac{b^2}{a}$, $q = \frac{b^2}{a^2}$ geſetzt wird.

Läßt man nun die beiden Halbaren unbeſchränkt ſo zunehmen: daß das Verhältniß $\frac{b^2}{a}$ gegen die endliche Grenze p und das Verhältniß $\frac{b^2}{a^2}$ gegen Null convergirt; ſo convergiren die Ellipſe und Hyperbel gegen die Parabel $y^2 = 2px$. Die Ellipſe convergirt gegen die Parabel, indem ſie ſich erweitert und die Hyperbel, indem ſie ſich zuſammenzieht (Fig. 165), ſo daß die Parabel

die Grenzscheide des Ueberganges von der Ellipse zur Hyperbel bildet.

Die drei Curven des zweiten Grades sind also in der Gleichung:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

enthalten, und ihre unterscheidenden Merkmale sind:

$q < o$ Ellipse,
$q = o$ Parabel,
$q > o$ Hyperbel.

Die Constante p wird gewöhnlich der Parameter genannt.

Uebungsaufgaben.

1) Zwei Winkelspitzen eines unveränderlichen Dreieckes bewegen sich auf zwei rechtwinkligen Geraden, man soll den Ort der dritten Winkelspitze des Dreieckes finden.
2) Es sind zwei feste sich schneidende Gerade gegeben, und eine dritte bewegliche Gerade schneidet die beiden ersten so, daß das entstehende Dreieck eine constante Fläche hat; man soll den Ort der Schwerpunkte dieser Dreiecke finden.
3) Man soll zeigen: daß die von jedem beliebigen Punkte einer Hyperbel durch zwei feste Punkte derselben gezogenen Sekanten auf der einen oder andern Asymptote constante Längen abschneiden.
4) Man soll beweisen: daß jede Sehne einer Hyperbel das Stück der einen oder andern Asymptote, welches zwischen den Tangenten in den beiden Endpunkten dieser Sehne liegt, in zwei gleiche Theile theilt.
5) Man soll eine Hyperbel construiren, wenn man kennt: 1) zwei Asymptoten und einen Punkt; 2) zwei Asymptoten und eine Tangente; 3) eine Asymptote und drei Punkte; 4) die Richtung der Asymptoten und drei Punkte; 5) eine Asymptote, einen Scheitel und einen Punkt.
6) Den Ort der Mitten aller durch denselben innerhalb einer Ellipse liegenden Punkt gezogenen Sehnen zu finden.
7) Man soll beweisen, daß, wenn zwei Punkte einer beweglichen Ebene auf zwei festen Geraden fortgleiten, ein Punkt dieser Ebene eine Ellipse oder eine gerade Linie beschreibt
8) Wenn durch zwei gegebene Punkte A, B einer Geraden zwei bewegliche Gerade AM, BM so gezogen werden, daß $\angle MAB = 2 . \angle MBA$ ist, den Ort des Durchschnittspunktes M zu finden.

Achtzehntes Kapitel.

Von den conjugirten Durchmeſſern.

§. 126.

Durchmeſſer in der Ellipſe.

Ein Syſtem paralleler Sehnen wird durch die Gleichung:

$$y = mx + k \qquad (1)$$

ausgedrückt, worin m eine Conſtante und k ein veränderlicher Parameter iſt, und die Gleichung des Ortes der Mittelpunkte dieſer Sehnen oder des Durchmeſſers iſt nach §. 97:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}x. \qquad (2)$$

Es geht alſo jeder Durchmeſſer durch den Mittelpunkt, und wenn m' den Richtungscoefficienten deſſelben bezeichnet; ſo hat man die Relation:

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad (3)$$

Ein Sehnenſyſtem (m'), d. h. deren Richtungscoefficient m' iſt, gäbe einen Durchmeſſer (m), und folglich bilden zwei Durchmeſſer (m), (m'), welche der Relation (3) genügen, ein Syſtem conjugirter Durchmeſſer, d. h. von ſolcher Beſchaffenheit: daß jeder die zu dem andern parallelen Sehnen halbirt. — Man findet die conjugirte einer gegebenen Richtung, wenn man zu letzterer eine parallele Sehne zieht und ihre Mitte mit dem Mittelpunkte der Curve durch eine Gerade verbindet.

Der Richtungscoefficient der Tangente im Punkte (x, y) iſt:

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

und wenn m' den Richtungscoefficienten $\frac{y}{x}$ des nach dem Berührungspunkte gehenden Durchmeſſers bezeichnet, ſo genügen m und m' der Relation (3); folglich iſt die Tangente der Ellipſe dem nach dem Berührungspunkte gehenden Durchmeſſer conjugirt.

§. 127.

Conjugirte Durchmeſſer als Coordinatenaxen.

Wenn a', b' die Längen derſelben conjugirten Durchmeſſer be-

zeichnen, so kann man a priori behaupten: daß die Gleichung der Ellipse von der Form ist:

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1, \qquad (4)$$

wenn man diese Durchmesser als Coordinatenaxen nimmt, weil jede der beiden Veränderlichen x, y für einen beliebigen Werth der andern zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe hat. — Aber auch die Transformation der Coordinaten führt zu demselben Resultate; denn wenn α, β die Winkel bezeichnen, welche die neuen Coordinatenaxen mit der ursprünglichen Axe der x bilden, und man setzt (s. §. 123):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} &= 0 \\ \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta &= -\frac{b^2}{a^2} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a'^2} &= \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}, \\ \frac{1}{b'^2} &= \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

so bekommt die Gleichung der Ellipse die Form (4).

Aus der Gleichung (5) erhellet: daß die neuen Axen conjugirte Durchmesser sind. — Zieht man das Quadrat der Gleichung (5) von dem Produkte der Gleichungen (6) ab, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a'^2 b'^2} &= \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{a^2 b^2} \\ \text{oder:} \\ a' b' \sin(\beta-\alpha) &= ab. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Das über zwei conjugirten Durchmessern construirte Parallelogramm ist also dem Rechtecke aus den beiden Axen gleich.

Aus den Gleichungen (6) folgt:

$$\frac{\sin^2\beta}{a'^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b'^2} = \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{a^2},$$

$$\frac{\cos^2\beta}{a'^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b'^2} = \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{b^2},$$

oder:

$$a'^2\sin^2\alpha + b'\sin^2\beta = \frac{a'^2 b'^2 \sin^2(\beta-\alpha)}{a^2} = b^2,$$

$$a'^2\cos^2\alpha + b'\cos^2\beta = \frac{a'^2 b'^2 \sin^2(\beta-\alpha)}{b^2} = a^2.$$

Aus dieſen Ausdrücken erhellet: daß die Summe der Quadrate der Projectionen zweier conjugirter Durchmeſſer auf eine Are der Curve conſtant und dem Quadrate dieſer Are gleich iſt. — Addirt man die beiden letzten Gleichungen, ſo hat man:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \qquad (8)$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmeſſer iſt der Summe der Quadrate der Aren gleich.

§. 128.

Durchmeſſer in der Hyperbel.

Da ſich die Gleichung der Hyperbel von der der Ellipſe nur durch das Zeichen von b^2 unterſcheidet, ſo ergeben ſich aus den obigen Reſultaten die entſprechenden für die Hyperbel, wenn man das Zeichen von b^2 ändert.

Die Relation (3) der conjugirten Richtungen wird:

$$mm' = \frac{b^2}{a^2}, \qquad (9)$$

und wenn $m < \frac{b}{a}$ iſt, ſo iſt folglich $m' > \frac{b}{a}$; der eine Durchmeſſer A'_1A' (Fig. 162) liegt alſo in dem Aſymptotenwinkel und iſt reell, während der andere B'_1B' in dem äußern Winkel liegt und imaginär iſt. — Da die Relation (9) für die conjugirte Hyperbel dieſelbe bleibt, ſo haben beide Hyperbeln daſſelbe Syſtem conjugirter Durchmeſſer; nur iſt der Durchmeſſer, welcher für die eine Hyperbel reell iſt, für die andere imaginär. — Wenn der eine Durchmeſſer OA' ſich der Aſymptote OG unendlich nähert, ſo nähert ſich der andere derſelben Aſymptote, und beide fallen mit ihr an der Grenze zuſammen. Denn wenn $m = \frac{b}{a}$ wird, ſo wird auch $m' = \frac{b}{a}$.

Die Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf zwei conjugirte Durchmeſſer iſt:

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

und die der Aſymptoten:

$$\frac{y'}{x'} = \pm \frac{b'}{a'}.$$

Die Diagonalen des über zwei conjugirten Durch-

meſſern conſtruirten Parallelogrammes fallen alſo mit den Aſymptoten zuſammen.

Die Gleichung (8) wird:

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,$$

d. h. die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Durchmeſſer iſt conſtant und der Differenz der Quadrate der Axen gleich.

§. 129.

Da die Gleichung der Ellipſe und Hyperbel in Beziehung auf ein Syſtem conjugirter Durchmeſſer dieſelbe Form hat, als in Bezug auf die Hauptaxen, ſo kann man alle weiter oben aus dieſer Form hergeleiteten Eigenſchaften dieſer beiden Curven auch auf den Fall erſtrecken, wo ſie auf ein Syſtem conjugirter Durchmeſſer bezogen ſind. — Wenn z. B. m, m' die Richtungscoefficienten zweier beliebiger conjugirter Durchmeſſer bezeichnen, ſo hat man wieder:

$$mm' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Hieraus folgt: das Rechteck aus den beiden zwiſchen dem Berührungspunkte und zwei conjugirten Durchmeſſern liegenden Stücken einer Tangente iſt conſtant und dem Quadrate des zu dieſer Tangente parallelen halben Durchmeſſers gleich. — Denn nimmt man den nach dem Berührungspunkte gehenden Durchmeſſer OA' (Fig. 166) zur Axe der x, den conjugirten Durchmeſſer OB' zur Axe der y, und ſind OD, OE auch zwei conjugirte Durchmeſſer; ſo ſind die Gleichungen der Curve und dieſer Durchmeſſer reſp.:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,\quad y = mx,\quad y' = m'x.$$

Setzt man hierin $x = a'$, ſo folgt $A'D = -ma'$, $A'E = m'a'$; folglich:

$$A'D \times A'E = -mm'a'^2 = b'^2.$$

Vermittelſt dieſes Satzes kann man, wenn ein Syſtem conjugirter Durchmeſſer OA', OB' der Größe und Richtung nach gegeben iſt, die Axen conſtruiren, welche nichts anders ſind, als ein Syſtem rechtwinkliger conjugirter Durchmeſſer. — Denn zieht man durch A' eine Parallele zu OB', macht das Perpendikel A'F=OB' und beſchreibt einen Kreis, deſſen Mittelpunkt auf DE liegt, und welcher durch O und F geht; ſo ſchneidet derſelbe die Tangente in

zwei Punkten D, E, welche mit dem Mittelpunkte O verbunden die Richtungen der beiden Aren geben. Zieht man ferner auf OD das Perpendikel A'P, so gibt die mittlere geometrische Proportionale zwischen OD und OP die eine Halbare OA'.

Bei der Hyperbel vereinfacht sich die Construction noch, weil die Diagonalen des über den beiden conjugirten Durchmessern construirten Parallelogrammes die Richtungen der Aren unmittelbar geben.

§. 130.

Man kann die vorhergehende Aufgabe auch durch Rechnung lösen. Denn wenn a', b' und $\beta - \alpha$ gegeben sind, so werden α, a und b durch die Gleichungen (5) und (6) bestimmt, und diese Gleichungen sind überhaupt zur Lösung jeder beliebigen Aufgabe über conjugirte Durchmesser hinreichend. — Will man z. B. die gleichen conjugirten Durchmesser haben, so geben die Gleichungen (6) durch Subtraction:

$$\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{b^2} = 0,$$

$$\sin(\beta-\alpha)\,\sin(\beta+\alpha)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0. \qquad (9)$$

Wenn $a = b$ ist, so wird die Gleichung (9) bei jedem Werthe von α erfüllt, und folglich sind im Kreise alle conjugirten Durchmesser auf einander senkrecht. — Aber wenn b^2 nicht $= a^2$ ist, so reducirt sich die Gleichung (9) auf:

$$\sin(\beta-\alpha)\,\sin(\beta+\alpha) = 0;$$

folglich ist:

$$\beta = \alpha, \text{ oder } \alpha+\beta = \pi.$$

Die erste Auflösung entspricht der Ellipse nicht, weil sonst $\operatorname{tang}^2\alpha = -\frac{b^2}{a^2}$ wäre, und die zweite gibt:

$$\operatorname{tang}\alpha' = -\operatorname{tang}\alpha = \frac{b}{a}.$$

In der Ellipse sind also die gleichen conjugirten Durchmesser nach den Diagonalen des aus den Aren construirten Rechteckes gerichtet.

Dagegen entspricht die zweite Auflösung der Hyperbel nicht, und die erste führt auf zwei conjugirte Durchmesser, welche in einer Asymptote zusammenfallen und beide unendlich

werden, ſo daß es in der Hyperbel eigentlich keine gleichen conjugirten Durchmeſſer gibt.

Wenn man $a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$ ſetzt, ſo iſt die Gleichung der Ellipſe in Bezug auf ihre gleichen conjugirten Durchmeſſer:

$$x^2 + y^2 = a'^2, \qquad (10)$$

alſo von derſelben Form, wie die Gleichung des auf ſeinen Mittelpunkt und auf rechtwinklige Aren bezogenen Kreiſes.

§. 131.

Durchmeſſer in der Parabel.

Die Gleichung der Parabel und die eines Syſtemes paralleler Sehnen ſei:

$$y^2 = 2px \text{ und } y = mx + k,$$

ſo iſt die Gleichung des Durchmeſſers:

$$y = \frac{p}{m};$$

d. h. alle Durchmeſſer der Parabel ſind zu ihrer Are parallel. — Aus der Relation $y = \frac{p}{m}$ folgt $m = \frac{p}{y}$, welches genau der Richtungscoefficient der Tangente iſt, und folglich iſt die Tangente im Endpunkte eines Durchmeſſers zu den Sehnen parallel, welche dieſer Durchmeſſer halbirt. — Die Gleichung der Parabel in Beziehung auf einen Durchmeſſer und die durch ſeinen Endpunkt gehende Tangente als Coordinatenaxen iſt:

$$y'^2 = 2p'x',$$

wo $p' = \frac{p}{\sin^2\alpha}$ und α der Winkel der Coordinatenaxen iſt.

Kennt man einen Durchmeſſer HH' (Fig. 164), die Tangente MT und den zugehörigen Parameter $MH' = p'$; ſo kann man die Are der Parabel leicht finden. Denn es iſt $MT = \frac{p\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = p'\cos\alpha$, und die Projection von H' auf die Tangente gibt den Punkt T, durch welchen man die Are parallel zu dem Durchmeſſer zieht. Der Scheitel der Parabel iſt die Mitte von TP und der Parameter $2p = 2PN$ (§. 57).

§. 132.

Eingeſchriebene Winkel — Supplementarſehnen.

Wenn man einen Punkt M (Fig. 166 a) der Ellipſe mit den beiden

Endpunkten eines Durchmeſſers C_1C durch gerade Linien MC, MC_1, welche Supplementarſehnen heißen, verbindet; ſo ſind dieſe Sehnen zu einem Syſteme conjugirter Durchmeſſer parallel. Denn wenn man durch den Mittelpunkt der Ellipſe eine Parallele zu CM zieht, ſo geht dieſelbe durch die Mitte I von MC_1.

§. 133.

Umgekehrt, wenn man durch die Endpunkte eines Durchmeſſers CC_1 zwei Parallelen zu zwei conjugirten Durchmeſſern zieht, ſo ſchneiden ſie ſich auf der Ellipſe. Denn es ſei C_1M die eine Sehne, welche von dem Durchmeſſer OI halbirt wird; ſo muß CM die andere ſein, weil man durch den Punkt C nur eine Parallele zu OI ziehen kann.

Der Winkel M nimmt alſo die verſchiedenen Werthe des von den beiden conjugirten Durchmeſſern gebildeten Winkels ϑ an, und man hat:

$$\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} = \frac{-(b^2+a^2\operatorname{tang}^2\alpha)}{c^2\operatorname{tang}\alpha}, \qquad (11)$$

woraus folgt:

$$a^2\operatorname{tang}^2\alpha + c^2\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}\alpha + b^2 = 0,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{-c\operatorname{tang}\vartheta \pm \sqrt{c^4\operatorname{tang}^2\vartheta - 4a^2b^2}}{2a^2}. \qquad (12)$$

Es darf alſo höchſtens $\operatorname{tang}\vartheta = \frac{2ab}{c}$ ſein, und wenn ω den ſpitzen Winkel bezeichnet, deſſen Tangente $= \frac{2ab}{c^2}$ iſt; ſo ändert ſich der eingeſchriebene Winkel ϑ von ω bis $\pi-\omega$. Das Minimum ω iſt der über der kleinen Axe beſchriebene Winkel BAB_1, deſſen Spitze in dem Endpunkte A der großen Axe liegt, und das Maximum $\pi-\omega$ iſt der über der großen Axe ſtehende Winkel ABA_1, deſſen Spitze in dem Endpunkte B der kleinen Axe liegt.

In der Hyperbel erhält man die Supplementarſehnen, wenn man irgend einen Punkt der Curve mit den Endpunkten eines reellen Durchmeſſers verbindet, und wenn man $-b^2$ ſtatt b^2 in (13) ſetzt; ſo kann die Wurzelgröße nicht imaginär, alſo ϑ weder ein Maximum, noch ein Minimum werden, und ändert ſich von o bis π.

Wenn man über einem Durchmeſſer CC_1 einen Halbkreis beſchreibt, ſo ſchneidet derſelbe die Ellipſe oder Hyperbel in zwei Punkten, die mit C und C_1 verbunden, Supplementarſehnen geben, welche zu den Axen parallel ſind. Ueberhaupt erhält man zwei conjugirte Durchmeſſer, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden, wenn man über CC_1 einen Kreisabſchnitt beſchreibt, der den gegebenen Winkel faßt.

Uebungsaufgaben.

1) Man ſoll zeigen: daß unter allen Syſtemen conjugirter Durchmeſſer der Ellipſe die Summe der Axen ein Minimum und die Summe der gleichen conjugirten Durchmeſſer ein Maximum iſt.
2) In die Ellipſe eine ſolche Sehne zu legen: daß die Summe aus ihrer Länge und dem Abſtande ihrer Mitte von dem Mittelpunkte der Curve ein Maximum wird.
3) Man ſoll den Ort der Ecken der über den conjugirten Durchmeſſern einer Ellipſe beſchriebenen Parallelogramme finden.
4) Man ſoll zeigen: daß von allen um dieſelbe Ellipſe beſchriebenen Parallelogrammen die über zwei conjugirten Durchmeſſern Minima ſind.
5) Man ſoll zeigen: daß von allen in dieſelbe Ellipſe beſchriebenen Parallelogrammen die, deren Diagonalen ein Syſtem conjugirter Durchmeſſer bilden, Maxima ſind.
6) Welche von allen in daſſelbe Parallelogramm beſchriebenen Ellipſen iſt ein Maximum?
7) Welche von allen um daſſelbe Parallelogramm beſchriebenen Ellipſen iſt ein Minimum?
8) Wenn zwei Ellipſen in einer Ebene eine ſolche Lage haben, daß zwei conjugirten Durchmeſſer der einen reſp. zu zwei conjugirten Durchmeſſern der andern parallel ſind und ſich in 4 Punkten ſchneiden; ſo liegen dieſe 4 Punkte auf einer dritten Ellipſe, deren gleiche conjugirte Durchmeſſer zu denen der beiden erſten Syſteme parallel ſind.

Neunzehntes Kapitel.

Von den Polen und Polaren.

§. 134.

Wenn man durch einen äußern Punkt r oder (x', y') an eine Curve des zweiten Grades:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o \quad (1)$$

Tangenten zieht, so sind die Berührungspunkte die Durchschnitte der gegebenen Curve mit der Geraden:

$$(2Ax+By+D)x' + (2Cy+Bx+E)y' + Dx+Ey+2F=o \quad (2)$$

(§. 64), und wenn man x', y' so variiren läßt, daß die Berührungssehne stets durch denselben Punkt p oder (x_1, y_1) geht; so hat man auch:

$$(2Ax_1+By_1+D)x' + (2Cy_1+Bx_1+E)y' + Dx_1+Ey_1+2F=o.$$

Diese Gleichung, worin x', y' veränderlich sind, drückt eine Gerade aus, und man hat folglich den Satz:

1) Wenn man von einem in der Ebene einer Curve des zweiten Grades genommenen Punkte p (Fig. 168 u. 169) beliebige Sekanten nach dieser Curve, und in den Durchschnittspunkten Tangenten an dieselbe zieht; so ist der Ort der Durchschnittspunkte je zweier Tangenten eine Gerade P. — Diese Gerade P heißt die Polare des Punktes p, welcher seinerseits der Pol der Geraden P genannt wird.

§. 135.

Eigenschaften der Polaren.

Wenn der Pol (x_1, y_1) gegeben ist, so ist die Gleichung der Polare:

$$(2Ax_1+By_1+D)x + (2Cy_1+Bx_1+E)y + Dx_1+Ey_1+2F=o. \quad (3)$$

Umgekehrt, wenn die Polare $p_1x+q_1y+1 = o$ gegeben ist, so wird ihr Pol durch die Relationen bestimmt:

$$\frac{2Ax_1+By_1+D}{p_1} = \frac{2Cy_1+Bx_1+E}{q_1} = \frac{Dx_1+Ey_1+2F}{1}.$$

Wenn man den durch den Pol gehenden Durchmesser zur Axe der x

und eine Parallele zur conjugirten Richtung als Axe der y nimmt, so reduciren sich die Gleichungen (1) und (3) auf:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = 0$$
$$(2Ax_1 + D)x + Dx_1 + 2F = 0,$$

woraus folgt:

2) Die Polare ist die conjugirte Richtung zu dem durch den Pol gehenden Durchmesser.

Wenn die Curve einen Mittelpunkt hat, so kann man $D = 0$ setzen, wodurch sich die Gleichung der Polare auf:

$$xx_1 = -\frac{F}{A}$$

reducirt. Der nach dem Pole gehende halbe Durchmesser ist alsdann die mittlere Proportionale zwischen den auf diesem Durchmesser gezählten Abständen des Mittelpunktes von dem Pole und von der Polare, oder mit andern Worten:

3) Der durch den Pol gehende Durchmesser wird durch die Curve und Polare harmonisch getheilt.

Es seien c, c′ und q die Punkte, worin der Durchmesser die Curve und die Polare trifft; so hat man:

$$\frac{pc}{pc'} : \frac{qc}{qc'} = -1 \text{ oder } \overline{oc}^2 = \overline{op} \cdot \overline{oq}.$$

Da sich in der Parabel der Punkt c′ ins Unendliche entfernt, so ist der Punkt c die Mitte von pq.

Wenn der Punkt p außerhalb der Curve liegt, so fällt seine Polare mit der Berührungssehne zusammen, und wenn der Punkt p auf der Curve liegt, so ist seine Polare die Tangente in diesem Punkte.

Der Pol eines Durchmessers liegt auf dem conjugirten Durchmesser in unendlicher Entfernung. — Die Polare des Mittelpunktes ist unendlich weit entfernt.

Die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) kann auf folgende Form:

$$2Ax_1x + 2Cy_1y + B(x_1y + xy_1) + D(x + x_1) + E(y + y_1) + 2F = 0$$

gebracht werden, welche sowohl in Bezug auf x und x_1 als in Beziehung auf y und y_1 symmetrisch ist. Hieraus folgt: daß die Polare des Punktes (x, y) durch den Punkt (x_1, y_1) geht, so daß man den Satz hat:

4) Die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden — und umgekehrt:

der Ort der Pole aller Geraden, welche durch denſelben Punkt gehen, iſt die Polare dieſes Punktes.

Eine durch zwei Punkte gehende Gerade hat den Durchſchnittspunkt der Polaren dieſer Punkte zum Pole.

§. 136.

5) Wenn man von einem Punkte p (Fig. 168 u. 169) nach einer Curve des zweiten Grades Sekantenpaaren zieht, und die Durchſchnittspunkte derſelben mit der Curve paarweiſe verbindet; ſo iſt der Ort der Durchſchnittspunkte der Verbindungslinien die Polare des Punktes p.

Wir wollen ein Sekantenpaar paa' und pbb' als Coordinatenaxen nehmen, ſo gibt dieſes Paar zwei Paare von Geraden ab, a'b' und ab', a'b, und folglich zwei Durchſchnittspunkte i, i'. Es ſeien x', x'' die Abſciſſen der Punkte a, a' und y', y'' die Ordinaten der Punkte b, b'; ſo werden die beiden Punkte i, i' durch folgende zwei Syſteme von Gleichungen gegeben:

$$\text{i} \ldots \begin{cases} \frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 1, \\ \frac{x}{x''} + \frac{y}{y''} = 1 \end{cases} \qquad \text{i}' \ldots \begin{cases} \frac{x}{x'} + \frac{y}{y''} = 1, \\ \frac{x}{x''} + \frac{y}{y'} = 1. \end{cases}$$

Wenn man die beiden erſten, ſo wie die beiden letzten Gleichungen durch Addition verbindet, ſo erhält man dieſelbe Gleichung:

$$\frac{x' + x''}{x'x''}\, x + \frac{y' + y''}{y'y''}\, y = 2,$$

welche folglich die Gerade ii' ausdrückt.

Die Gleichung der Curve iſt von der Form:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o,$$

und wenn man darin ſucceſſive $x = o$, $y = o$ ſetzt; ſo erhält man zwei Gleichungen, welche die Durchſchnittspunkte der Curve mit den Coordinatenaxen geben, nämlich:

$$Ax^2 + Dx + F = o, \quad \frac{x' + x''}{x'x''} = -\frac{D}{F},$$

$$Cy^2 + Ey + F = o, \quad \frac{y' + y''}{y'y''} = -\frac{E}{F}.$$

Die Gerade ii' hat alſo zur Gleichung:

$$Dx + Ey + 2F = o,$$

und iſt die Polare des Punktes p. — Ein anderes Sekanten-

paar würde dieſelbe Polare geben, und folglich iſt der Satz bewieſen.

Die vier Geraden ip, ia, P, ia′ bilden ein harmoniſches Büſchel (§. 34) und die dadurch auf der Sekante pa beſtimmten Punkte p, a, p′, a′ eine harmoniſche Proportion (§. 33). Man hat alſo den Satz:

Eine beliebige, durch den Pol gehende Sekante wird von der Curve und Polare harmoniſch getheilt.

Der Satz 1) iſt nur ein beſonderer Fall von 5); denn wenn die Sekanten paa′ und pbb′ ſich einander nähern, und endlich zuſammenfallen, ſo werden die Geraden ab und a′b′ Tangenten. — Auch der Satz in §. 35 iſt in dem Satze 5) als beſonderer Fall enthalten, weil das Syſtem zweier Geraden ein beſonderer Fall einer Curve des zweiten Grades iſt.

Der Satz 5 gibt auch ein Mittel an die Hand: von einem außerhalb einer Curve des zweiten Grades gegebenen Punkte p eine Tangente an dieſelbe zu ziehen; denn zieht man durch dieſen Punkt p zwei beliebige Sekanten, ſo beſtimmen dieſelbe die Polare P, und mithin die Berührungspunkte.

§. 137.

Umſchriebenes Viereck.

Vier Tangenten an einer Curve des zweiten Grades (Fig. 170) bilden ein vollſtändiges Viereck mit drei Paaren gegenüberliegender Winkel a und a′, b und b′, c und c′. — Wenn d, e, f, g die vier Berührungspunkte ſind, und man verbindet dieſelben paarweiſe durch Gerade; ſo erhält man drei Paare Berührungsſehnen, welche ſich in den Punkten p, q, r ſchneiden, und jeder dieſer letzten Punkte iſt der Pol der durch die beiden andern Punkte gehenden Geraden, ſo daß die vier Punkte a, a′, q, r in der Polare von p liegen. — Man hat alſo folgenden Satz:

6) Die drei Diagonalen aa′, bb′, cc′ eines um eine Curve des zweiten Grades beſchriebenen Vierecks bilden ein Dreieck pqr, worin jede Winkelſpitze ein Pol der Gegenſeite iſt, und wenn man die Berührungspunkte paarweiſe verbindet; ſo erhält man drei Sekantenpaare, deren Durchſchnittspunkte p, q, r ſind.

Anwendungen.

1) Eine Curve des zweiten Grades zu construiren, wenn der Mittelpunkt o (Fig. 171) und drei Punkte a, b, c derselben gegeben sind. — Es sei i die Mitte von ab, so ist die Gerade oi die conjugirte von ab, und ca, cb bestimmen auf oi zwei Punkte p, q von solcher Beschaffenheit, daß die Polare von p durch q geht. Ferner sei $oA = \sqrt{op.oq}$, und ebenso bestimmt man den halben conjugirten Durchmesser oB, so daß man auf die Construction in §. 129 zurückkommt.

2) Eine Curve des zweiten Grades zu construiren, wenn der Mittelpunkt o und drei Tangenten derselben gegeben sind (Fig. 172). — Die drei Tangenten bilden ein um die Curve beschriebenes Dreieck abc, und die vom Mittelpunkte o der Curve nach den drei Winkelspitzen des Dreieckes gezogenen halben Durchmesser oa, ob, oc sind zu den Berührungssehnen conjugirt. Zieht man drei Gerade mm', nn', pp', wovon jede durch den zugehörigen Durchmesser halbirt wird, und durch die Punkte m, m' die Parallelen mi, m'i zu nn', pp'; so trifft ai die bc in dem Berührungspunkte d. Ebenso bestimmen die Parallelen de, df zu pp', nn' die beiden andern Berührungspunkte e, f, und man findet alsdann leicht die beiden halben conjugirten Durchmesser oA, oB.

3) Eine Curve des zweiten Grades zu construiren, wenn vier Tangenten und ein Berührungspunkt d (Fig. 170) gegeben sind. — Man construirt das Dreieck pqr aus den Diagonalen des umschriebenen Viereckes, und die drei Geraden dp, dq, dr bestimmen die andern drei Berührungspunkte g, e, f.

§. 138.

Reciproke Polarsysteme.

Ein ebenes Vieleck im allgemeinsten Sinne des Wortes ist ein System in einer Ebene gezogener, sich schneidender, unbegrenzter gerader Linien A, B, C, . . ., (Fig. 172a) welche die Seiten des Vieleckes bilden, und die Durchschnittspunkte (A, B), (B, C), . . . derselben sind die Spitzen des Vieleckes. — Construirt man in Beziehung auf eine gegebene Curve des zweiten Grades, welche die

die Pole $a', b', c', \ldots$ der Geraden $A, B, C, \ldots$ und verbindet diese Punkte paarweise durch gerade Linien, so erhält man ein zweites Vieleck, wovon jede Spitze der Pol der entsprechenden Seite des ersten Vieleckes ist, und umgekehrt ist jede Spitze (A, B) des ersten Vieleckes der Pol der entsprechenden Seite $a'b'$ des zweiten. — Zwei Vielecke, welche so beschaffen sind: daß die Spitzen des einen die Pole der Seiten des andern sind, heißen **reciproke** oder **correlative Vielecke**.

Wenn die Geraden $A, B, C, \ldots$ die successiven Tangenten einer Curve S bilden, so bilden die Pole $a', b', c', \ldots$ eine zweite Curve S' (Fig. 173). Convergirt B gegen A, so wird der Punkt (A, B) der Berührungspunkt a von A, und b' convergirt gleichzeitig gegen a', und die Gerade $a'b'$ wird die Tangente A' in a', so daß A' und A die Polaren von a und a' sind. — Die beiden Curven S und S' heißen **reciproke Polaren**; die Punkte der einen sind die Pole der Tangenten der andern.

Es sei:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der Richtcurve des zweiten Grades,

$$f(x, y) = 0, \qquad (S)$$

die Gleichung der Curve S und x', y' die Coordinaten des Punktes der reciproken Polare S', welcher dem Punkte (x, y) von S entspricht. Daß die Polare des Punktes (x', y') Tangente an S ist, wird durch die Relationen:

$$\frac{f'_x(x, y)}{2Ax' + By' + D} = \frac{f'_y(x, y)}{2Cy' + Bx' + E} = \frac{\psi + 2\chi}{Dx' + Ey' + 2F}, \qquad (4)$$

ausgedrückt, und wenn man x, y zwischen den Gleichungen (4) und (S) eliminirt; so erhält man die Gleichung der reciproken Polare S' mit x', y'. — Oder: die Curve S' kann als die Einhüllungscurve der Polaren:

$$(2Ax + By + D)X + (2Cy + Bx + E)Y + Dx + Ey + 2F = 0, \qquad (5)$$

welche den verschiedenen Punkten (x, y) von S entsprechen, betrachtet werden (§. 86), wo X, Y die **laufenden** Coordinaten und x, y zwei veränderliche Parameter bedeuten, welche der Relation (S) genügen müssen.

Die Gleichung (5) kann man auf folgende Form bringen:

$$pX + qY + 1 = 0,$$

wenn man setzt:

$$\frac{2Ax + By + D}{p} = \frac{2Cy + Bx + E}{q} = \frac{Dx + Ey + 2F}{1},$$

und dieſe letzten Gleichungen geben für x, y Werthe von der Form:

$$x = \frac{\alpha p + \alpha' q + \alpha''}{\gamma p + \gamma' q + \gamma''}, \quad y = \frac{\beta p + \beta' q + \beta''}{\gamma p + \gamma' q + \gamma''}.$$

Subſtituirt man dieſe Ausdrücke für x, y in $f(x, y) = o$, ſo erhält man zwiſchen den Parametern p, q eine Gleichung, welche von demſelben Grade iſt, als die der Curve S. — Wenn die Curve S vom zweiten Grade iſt, ſo iſt die Einhüllungscurve auch vom zweiten Grade, ſo daß man folgenden Satz hat:

7) Die reciproke Polare einer Curve vom zweiten Grade iſt auch vom zweiten Grade.

Beiſpiel. Wir wollen das Geſagte auf den beſondern Fall anwenden, wo die Richtcurve ein Kreis:

$$x^2 + y^2 - 1 = o,$$

und die gegebene Curve eine concentriſche Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

iſt; ſo erhalten wir als reciproke Polare:

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = 1,$$

d. h. eine Ellipſe, deren Axen die reciproken Werthe der Axen der gegebenen Ellipſe ſind.

Die Anwendung der reciproken Syſteme iſt in der Geometrie von großem Nutzen. Denn wenn ein Lehrſatz über eine Figur bewieſen iſt, ſo ergibt ſich daraus unmittelbar der entſprechende Lehrſatz über die reciproke Figur, wenn man in dem erſten Punkte ſtatt Gerade und umgekehrt Gerade ſtatt Punkte ſetzt.

§. 139.

Pascals Sechseck.

Nach dem Vorhergehenden ergibt ſich auch folgender Satz leicht:

8) Wenn ſich die n Seiten eines Vieleckes um n feſte Punkte drehen, während $n-1$ Winkelſpitzen auf gegebenen geraden Linien fortgleiten; ſo beſchreibt die freie Spitze eine Curve des zweiten Grades.

Denn es ſeien α_1, β_1; α_2, β_2; . . . α_n, β_n die Coordinaten der n feſten Punkte; ferner:

$$a_1 x + b_1 y + 1 = o, \qquad (1)$$
$$a_2 x + b_2 y + 1 = o, \qquad (2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} x + b_{n-1} y + 1 = o \qquad (n-1)$$

die Gleichungen der $n-1$ Richtlinien, und die Gleichungen der n Seiten des Vieleckes:

$$p_1 x + q_1 y + 1 = 0,$$
$$p_2 x + q_2 y + 1 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n x + q_n y + 1 = 0.$$

Gleitet nun die Winkelspitze $(1, 2)$ auf der Geraden (1), die Spitze $(2, 3)$ auf der Geraden (2), . . . die Spitze $(n-1, n)$ auf der Geraden $(n-1)$ fort, und beschreibt endlich die Spitze $(n, 1)$, deren Coordinaten x, y seien, den gesuchten Ort; so hat man:

$$xp_1+yq_1+1=0,\quad \alpha_1p_1+\beta_1q_1+1=0,$$
$$(q_1-b_1)p_2-(p_1-a_1)q_2+b_1p_1-a_1q_1=0,\quad \alpha_2p_2+\beta_2p_2+1=0,$$
$$(q_2-b_2)p_3-(p_2-a_2)q_3+b_2p_2-a_2q_2=0,\quad \alpha_3p_3+\beta_3q_3+1=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(q_{n-1}-b_{n-1})p_n-(p_{n-1}-a_{n-1})q_n+b_{n-1}p_{n-1}-a_{n-1}q_{n-1}=0,$$
$$\alpha_n p_n+\beta_n q_n+1=0,\quad xp_n+yq_n+1=0;$$

also im Ganzen $2n+1$ Gleichungen zwischen den $2n+2$ Veränderlichen $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots p_n, q_n, x, y$, und wenn man die $2n$ ersten eliminirt; so erhält man die Gleichung des Ortes. — Die beiden ersten der obigen Gleichungen geben p_1 und q_1 durch Brüche ausgedrückt, deren Zähler und Nenner Polynome des ersten Grades von x und y sind. Setzt man diese Werthe von p_1 und q_1 in die beiden folgenden der obigen Gleichungen, so nehmen diese folgende Form an:

$$A_1p_2 + B_1q_2 + C_1 = 0,\quad \alpha_2p_2 + \beta_2q_2 + 1 = 0,$$

wo A_1, B_1, C_1 lineare Functionen von x, y sind. Diese beiden letzten Gleichungen geben für p_2 und q_2 ebenfalls Brüche, deren Zähler und Nenner in Bezug auf x, y vom ersten Grade sind. Setzt man diese Werthe von p_2 und q_2 in die nächstfolgenden beiden Gleichungen, und so fort bis zu den beiden letzten, so erhält man p_n, q_n auf dieselbe Weise ausgedrückt, und wenn man endlich die Werthe von p_n, q_n in die letzte Gleichung substituirt; so erhält man eine Gleichung des zweiten Grades nach x und y. Der gesuchte Ort ist also eine Curve des zweiten Grades.

Diese Curve geht durch die beiden äußersten festen Punkte (α_1, β_1), (α_n, β_n); denn wenn man resp. α_1 und β_1 für x und y setzt, so werden die beiden ersten Gleichungen identisch, und es

bleiben zur Bestimmung der zugehörigen Werthe von $p_1, q_1, \ldots p_n, q_n$ noch $2n$ Gleichungen.

§. 140.

Ebenso ergibt sich folgender Satz sehr leicht:

9) **Wenn die n Ecken eines Vieleckes auf n gegebenen Geraden fortgleiten, während sich n−1 Seiten um n−1 feste Punkte drehen; so umhüllt die freie Seite eine Curve des zweiten Grades.**

Es seien die Gleichungen der n Richtlinien:

$$a_1 x + b_1 y + 1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + 1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n x + b_n y + 1 = 0,$$

die $n-1$ festen Punkte:

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}),$$

die n Eckpunkte des Vieleckes;

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_n, y_n)$$

und endlich die Gleichung der freien Vieleckseite:

$$px + qy + 1 = 0.$$

Wenn man ausdrückt: daß die Eckpunkte des Vieleckes auf den gegebenen Geraden fortgleiten und daß die Seiten desselben durch die festen Punkte gehen, so erhält man folgende Gleichungen:

$$px_1+qy_1+1=0,\ a_1x_1+b_1y_1+1=0,$$
$$(y_1-\beta_1)x_2-(x_1-\alpha_1)y_2+\beta_1x_1-\alpha_1y_1=0,\ a_2x_2+b_2y_2+1=0,$$
$$(y_2-\beta_2)x_3-(x_2-\alpha_2)y_2+\beta_2x_2-\alpha_2y_2=0,\ a_3x_3+b_3y_3+1=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(y_{n-1}-\beta_{n-1})x_n-(x_{n-1}-\alpha_{n-1})y_n+\beta_{n-1}x_{n-1}-\alpha_{n-1}y_{n-1}=0,$$
$$a_n x_n + b_n y_n + 1 = 0,\ qx_n + qy_n + 1 = 0.$$

Wenn man zwischen diesen $2n+1$ Gleichungen die $2n$ Veränderlichen $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n$ auf die früher angegebene Weise eliminirt, so erhält man successive x_1 und y_1, x_2 und y_2, ... x_n und y_n durch Brüche ausgedrückt, deren Zähler und Nenner lineare Functionen von p und q sind, und wenn man die Werthe von x_n, y_n in die letzte der obigen Gleichungen substituirt; so bekommt man eine Gleichung des zweiten Grades nach p und q, welche eine Curve des zweiten Grades ausdrückt.

Diese Curve berührt die beiden äußersten Richtlinien (a_1, b_1)

und (a_n, b_n); denn wenn man resp. a_1, b_1 für p, q setzt, so werden die beiden ersten Gleichungen identisch.

§. 141.

Eingeschriebenes Sechseck.

Wir wollen den besondern Fall eines Dreieckes betrachten, dessen drei Seiten sich um drei feste Punkte a, b, c (Fig. 174) drehen, während zwei Winkelspitzen g, h auf zwei Geraden ox, oy fortgleiten, also die freie Ecke m eine Curve des zweiten Grades beschreibt. Gibt man der beweglichen Seite gh die Lagen br, bs, bd, be, bo, so erhält man die fünf Punkte a, c, d, e, o der Curve, wodurch sie vollständig bestimmt ist, so daß man also ein in eine Curve des zweiten Grades beschriebenes Sechseck odamceo hat, und die drei Punkte g, b, h, d. h. die Durchschnittspunkte der Gegenseiten od und cm, da und ec, am und oe, in gerader Linie liegen. — Man hat also den Satz:

10) Wenn auf einer Curve des zweiten Grades sechs Punkte nach Belieben angenommen werden, und man, von einem derselben ausgehend, alle übrigen durchläuft, ehe man zu dem Ausgangspunkte zurückkommt, und die Seiten nach der Ordnung numerirt, in welcher man sie erhalten hat; so liegen die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten (1, 4), (2, 5), (3, 6) in einer Geraden (Fig. 175).

§. 142.

Umschriebenes Sechseck.

Wenn man an sechs Punkte einer Curve des zweiten Grades Tangenten zieht, so erhält man ein umschriebenes Sechseck, dessen Winkelspitzen 1′, 2′, ... 6′ die Pole der Seiten 1, 2, ... 6 des eingeschriebenen Sechseckes sind, während die Diagonalen (1, 4), (2, 5) und (3, 6) die Polaren der Punkte (1, 4), (2, 5) und (3, 6) bilden, und da diese drei Punkte in derselben Geraden A liegen; so folgt: daß die drei Diagonalen durch den Punkt a′ gehen, welcher der Pol von A ist. — Man hat also den Satz:

11) Die drei Diagonalen, welche je zwei Gegenwinkel eines in eine Curve des zweiten Grades

beſchriebenen Sechseckes verbinden, gehen durch denſelben Punkt.

Dieſer Lehrſatz 11, welcher der correlative von 10 iſt, ließe ſich auch direkt aus 9, welcher der correlative von 8 iſt, ableiten. Denn mittelſt irgend einer Richtcurve des zweiten Grades werden nach der Methode der reciproken Polaren die n Punkte durch n Gerade und die $n-1$ Geraden durch $n-1$ Punkte erſetzt, ſo wie das bewegliche Vieleck durch das reciproke, und der freien Ecke des erſten, welche eine Curve des zweiten Grades beſchreibt, entſpricht die freie Seite des zweiten, welche folglich eine Curve des zweiten Grades umhüllt.

Wenn zwei aufeinanderfolgende Ecken des eingeſchriebenen Sechseckes zuſammenfallen, ſo wird die dazwiſchen liegende Seite eine Tangente der Curve. Folglich hat ein in eine Curve des zweiten Grades beſchriebenes Fünfeck, Viereck und Dreieck die Eigenſchaften des Sechseckes, wenn man die Anzahl der Seiten durch Tangenten ergänzt.

Wenn zwei ſucceſſive Ecken des eingeſchriebenen Sechseckes zuſammenfallen, ſo kommen die beiden entſprechenden Seiten des umſchriebenen Sechseckes in eine gerade Linie zu liegen und die zwiſchenliegende Winkelſpitze wird der Berührungspunkt der doppelten Seite. Ein um eine Curve des zweiten Grades beſchriebenes Fünfeck, Viereck und Dreieck hat alſo die Eigenſchaften des Sechseckes, wenn man die Anzahl der Ecken durch Berührungspunkte ergänzt.

Von den vielen Sätzen, welche ſich auf dieſe Weiſe aus den beiden allgemeinen Lehrſätzen ableiten laſſen, wollen wir blos die beiden folgenden hier noch anführen:

Wenn man in eine Curve des zweiten Grades ein Dreieck beſchreibt, ſo liegen die drei Durchſchnittspunkte der Seiten mit den Tangenten in den Eckpunkten in gerader Linie.

Wenn man um eine Curve des zweiten Grades ein Dreieck beſchreibt, ſo gehen die drei Geraden, welche die Winkelſpitzen mit den Berührungspunkten der Gegenſeiten verbinden, durch einen und denſelben Punkt.

§. 143.

Anwendung des Obigen auf die Construction von Curven des zweiten Grades.

1) Wenn 3 Tangenten und die Berührungspunkte von zwei derselben gegeben sind. — Man hat in diesem Falle ein umschriebenes Dreieck. Verbindet man die beiden bekannten Berührungspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken durch gerade Linien, und zieht durch den Durchschnittspunkt der letztern und die dritte Ecke eine Gerade; so bestimmt dieselbe den dritten Berührungspunkt, und endlich schneiden sich die Verbindungslinien der Dreiecksspitzen mit den Mittelpunkten der Berührungssehnen im Mittelpunkte der Curve.

2) Wenn 3 Punkte der Curve und die Tangenten in zwei derselben gegeben sind. — Der Lehrsatz über das eingeschriebene Dreieck gibt die dritte Tangente.

3) Wenn 4 Tangenten und 1 Berührungspunkt gegeben sind. — Man hat ein umschriebenes Viereck. Ergänzt man die Anzahl der Spitzen desselben durch den gegebenen und einen unbekannten Berührungspunkt; so erhält man den letztern durch Anwendung des betreffenden Lehrsatzes.

4) Wenn 4 Punkte der Curve und die Tangente in einem derselben gegeben sind. — Ergänzt man die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen Sechseckes durch die gegebene und eine unbekannte Tangente, so wird letztere durch den betreffenden Lehrsatz bestimmt.

5) Wenn 5 Tangenten gegeben sind. — Man bestimmt successive jeden der Berührungspunkte.

6) Wenn 5 Punkte der Curve gegeben sind. — Man bestimmt successive die Tangenten in diesen Punkten.

Uebungsaufgaben.

1) Wenn in eine Curve des zweiten Grades zwei Dreiecke beschrieben sind, und 5 Seiten derselben sind Tangenten an einer andern Curve des zweiten Grades; so ist auch die sechste Seite Tangente an der zweiten Curve, was bewiesen werden soll.
2) Wenn zwei Dreiecke um eine Curve des zweiten Grades beschrieben sind, und 5 Spitzen derselben auf einer andern Curve des zweiten Grades liegen, zu beweisen: daß auch die höchste Spitze auf dieser Curve liegt.

3) Die gegenseitige Entfernung der Mittelpunkte der in und um dasselbe Dreieck beschriebenen Kreise als Funktion der Halbmesser dieser Kreise zu finden.

4) Es seien A, B zwei in der Ebene einer gleichseitigen Hyperbel (d. h. für welche a = b ist) liegende Punkte und C der Durchschnittspunkt der Parallelen, welche durch jeden der Punkte A, B resp. zu der Polare des andern gezogen sind; zu beweisen: daß die 3 Punkte A, B, C und der Mittelpunkt der Hyperbel in demselben Kreisumfange liegen.

5) Man soll zeigen: daß in jedem um eine gleichseitige Hyperbel beschriebenen Vierecke die drei Durchschnittspunkte der Diagonalen auf einer durch den Mittelpunkt der Curve gehenden Kreislinie liegen.

6) Wenn man von einem in der Ebene einer Ellipse liegenden Punkte A Perpendikel auf die gleichen conjugirten Durchmesser fällt, zu beweisen: daß eine der Diagonalen des aus diesen Perpendikeln construirten Parallelogrammes auf der Polare des Punktes A senkrecht ist.

Zwanzigstes Kapitel.

Theorie der Brennpunkte.

§. 144.

Wir wollen den Ort der Punkte betrachten, welche so beschaffen sind: daß der Abstand eines jeden von einem festen Punkte, Brennpunkt genannt, eine ganze lineare Funktion der geradlinigen oder parallelen Coordinaten x, y jenes Punktes ist. — Da die Formeln zur Transformation der Parallelcoordinaten unter sich linear sind, so ist jede lineare Funktion der Veränderlichen x, y in einem gewissen Systeme paralleler Coordinaten auch in jedem andern Parallelcoordinatensysteme linear, und man kann folglich, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu vermindern, rechtwinklige Coordinaten zum Grunde legen. — Es seien α, β die Coordinaten des Brennpunktes F (Fig. 176) und x, y die eines belie-

bigen Punktes M des Ortes; ſo wird der Abſtand des Punktes M von dem Brennpunkte ausgedrückt durch:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}.$$

Da ferner eine lineare Funktion der Coordinaten x, y des Punktes M von der Form iſt:

$$mx+ny+t;$$

ſo hat man für die Gleichung des geſuchten Ortes:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm(mx+ny+t), \qquad (1)$$

oder:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+t)^2=0. \qquad (2)$$

Da dieſe Gleichung vom zweiten Grade iſt und 5 willkürliche Parameter enthält, ſo drückt ſie alle Curven des zweiten Grades aus.

Der Abſtand MP des Punktes M von der Geraden DD′ oder:

$$mx+ny+t=0 \qquad (3)$$

wird ausgedrückt durch:

$$\frac{mx+ny+t}{\pm\sqrt{m^2+n^2}},$$

und wenn man ſetzt:

$$k=\sqrt{m^2+n^2};$$

ſo wird die Gleichung (1):

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=k\cdot\frac{mx+ny+t}{\pm\sqrt{m^2+n^2}},$$

woraus erhellet: daß der Abſtand jedes Punktes M des geſuchten Ortes von einem feſten Punkte F zu ſeinem Abſtande von einer feſten Geraden DD′ (Richtlinie) in einem conſtanten Verhältniſſe ſteht.

§. 145.

Beſtimmung der Brennpunkte und Richtlinien.

Um ſtreng zu beweiſen: daß die Gleichung (2) alle Curven des zweiten Grades ausdrückt, müßte man dieſe Gleichung mit der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

identificiren, was die fünf folgenden Relationen gibt:

$$\frac{1-m^2}{A}=\frac{1-n^2}{C}=-\frac{2mn}{B}=-\frac{2(\alpha+mt)}{D}=-\frac{2(\beta+nt)}{E}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2-t^2}{F}, \qquad (4)$$

und zeigen: daß jedem Systeme von Werthen der Coefficienten A, B, C, . . ., welche eine Curve geben können, ein System endlicher und reeller Werthe von α, β, m, n, t entspricht. Allein wir haben früher gesehen (§. 125), daß alle Curven des zweiten Grades, abgesehen von ihren besondern Lagen in ihrer Ebene, in der Gleichung:

$$y^2 - 2px - qx^2 = o \qquad (5)$$

enthalten sind, so daß es genügt, die Gleichung (2) mit (5) zu identificiren. Wenn die Gleichung (2) alle in (5) enthaltene Curven ausdrückt, so drückt sie alle Curven des zweiten Grades aus, welche Lage sie in der Ebene auch haben mögen, und wenn eine der in (5) enthaltenen Curven eine gewisse Eigenschaft bei Zugrundlegung eines bestimmten Coordinatensystemes hat; so hat sie diese Eigenschaft auch in Bezug auf jedes andere Axensystem, d. h. man kann die ursprünglichen Axen fest liegen lassen, und die Curve in der Ebene verrücken. — Die Gleichungen (4) reduciren sich auf:

$$\frac{1-m^2}{-q}=\frac{1-n^2}{1}=\frac{mn}{o}=\frac{\alpha+mt}{p}=\frac{\beta+nt}{o}=\frac{\alpha^2+\beta^2-t^2}{o}=\lambda. \qquad (6)$$

Der Gleichung $mn = o$ kann auf doppelte Weise genügt werden, sowohl durch $m = o$, als durch $n = o$. Im ersten Falle hat man:

$$m=o,\ \lambda=-\frac{1}{q},\ n^2=1+\frac{1}{q},\ \alpha=-\frac{p}{q},\ t^2=-\frac{p^2}{q},\ \ldots$$

und wenn t reell sein soll, so muß q negativ sein. Aber wenn $q < o$ ist, so ist sein absoluter Werth < 1, und n wäre imaginär; es kann also den Gleichungen (6) nicht durch $m = o$ genügt werden. — Für $n = o$ hat man:

$$\left.\begin{array}{l} n=o,\ \beta=o,\ m=\sqrt{1+q},\ t=\pm\alpha \\ \alpha=\dfrac{p}{1\pm m}=\dfrac{p(\pm m-1)}{q} \end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Die Relation $\beta = o$ zeigt: daß die Ellipse sowohl als die Hyperbel zwei auf der ersten oder Hauptaxe liegende Brennpunkte, und zwei auf dieser Axe senkrechte Richtlinien hat.

Da ferner $\alpha = -\frac{p}{q} \pm \frac{mp}{q}$ und die Abscisse des Mittelpunktes

$= -\frac{p}{q}$ ist, so folgt: daß die beiden Brennpunkte auf der ersten Axe zu beiden Seiten des Mittelpunktes und in gleichen Entfernungen von demselben liegen. Diese Entfernung ist in der Ellipse $= c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Beschreibt man also aus dem Scheitel B (Fig. 159) mit dem Halbmesser a einen Kreis, so schneidet derselbe die erste oder große Axe der Ellipse in zwei innerhalb der Curve liegenden Punkten F, F_1, welche die beiden Brennpunkte sind. Die Größe 2c heißt in der Ellipse die Excentricität — In der Hyperbel ist diese Entfernung $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, und wenn man aus dem Scheitel B (Fig. 162) mit dem Halbmesser $c = OG$ einen Kreis beschreibt; so schneidet derselbe die erste oder Queraxe in zwei Punkten F, F_1, welche die beiden Brennpunkte der Hyperbel sind.

Den beiden Brennpunkten F, F_1 entsprechen zwei Richtlinien D, D_2, welche durch die Gleichungen:

$$mx + t = o \text{ oder } x = \frac{\pm\alpha}{m} = \frac{p(-m \pm 1)}{mq} = -\frac{p}{q} \pm \frac{p}{mq} = \pm\frac{a_2}{c}$$

ausgedrückt werden und zu beiden Seiten des Mittelpunktes in gleicher Entfernung von demselben liegen. — Das Produkt aus den Abständen eines Brennpunktes und der entsprechenden Richtlinie vom Mittelpunkte ist:

$$\pm\frac{mp}{q} \cdot \pm\frac{p}{mq} = \frac{p^2}{q^2} = a^2.$$

Ein Brennpunkt und die entsprechende Richtlinie liegen auf derselben Seite des Mittelpunktes, und die Richtlinie erhält man leicht durch eine dritte Proportionale.

In der Parabel ist $q = o$, $m = 1$, $\alpha = \frac{p}{2}$, und die Gleichung der Richtlinie ist:

$$x = -\frac{p}{2} = -\alpha.$$

Die Parabel hat also nur einen Brennpunkt F (Fig. 164) und eine Richtlinie D, welche beide gleichweit, nämlich um den halben Parameter, vom Scheitel entfernt sind.

Das constante Verhältniß $k = m = \sqrt{1+q} = \frac{c}{a}$ ist in der Ellipse < 1, in der Parabel $= 1$ und in der Hyperbel > 1.

§. 146.

Eigenſchaften der Brennpunkte.

Der Abſtand eines Punktes der Curve vom Brennpunkte iſt:

$$\pm(mx+ny+t) = \pm(mx+t) = \pm\left[m\left(x+\frac{p}{q}\right)\mp\frac{p}{q}\right],$$

und wenn man $x' = x \pm \frac{p}{q}$ ſetzt, wo x' die vom Mittelpunkte aus gezählte Abſciſſe iſt; ſo wird der letzte Ausdruck:

$$\pm(mx' \mp a),$$

wo das erſte Doppelzeichen ſo genommen werden muß, daß man eine poſitive Größe erhält. — Bezeichnen u, v die Abſtände eines Punktes M der Ellipſe von den Brennpunkten F, F_1, ſo hat man:

$$u = a - mx',$$
$$v = a + mx',$$

folglich:

$$u + v = 2a;$$

1) d. h. die Summe der Entfernungen jedes Punktes der Ellipſe von den beiden Brennpunkten iſt conſtant und der großen Axe gleich.

In der Hyperbel muß man zwei Zweige unterſcheiden. Da für den Zweig zur Rechten $mx' > a$ iſt, ſo hat man für dieſen Zweig:

$$u = mx' - a,$$
$$v = mx' + a,$$

alſo:

$$v - u = 2a,$$

und für den Zweig zur Linken:

$$u = -mx' + a,$$
$$v = -mx' - a,$$

folglich:

$$u - v = 2a;$$

2) d. h. die Differenz der Entfernungen jedes Punktes der Hyperbel von den beiden Brennpunkten iſt conſtant und der Quer- oder Hauptaxe gleich.

Von der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades ausgehend, haben wir im Vorhergehenden die geometriſchen Eigenſchaften wieder gefunden, welche wir im erſten Kapitel zur Definition der Ellipſe, Hyperbel und Parabel genommen hatten, ſo daß die Identität dieſer letzten Curven mit denen des zweiten Grades vollſtändig dargethan iſt.

§. 147.

Richtkreis.

Wenn man in der Ellipſe jeden Radiusvector F_1M (Fig. 176) um ein Stück $MN = FM$ verlängert, ſo iſt der Ort der Punkte N ein Kreis, deſſen Mittelpunkt F_1 und deſſen Halbmeſſer $= 2a$ iſt. In der Hyperbel muß man FM von F_1M abſchneiden, ſtatt hinzuzuſetzen; und da die Linie MN auf dem Kreiſe normal iſt, ſo hat man den Satz:

3) Die drei Curven des zweiten Grades können als der Ort der Punkte betrachtet werden, welche von einem feſten Punkte und von einem Kreiſe gleichweit entfernt ſind. — Wenn der feſte Punkt innerhalb des Richtkreiſes liegt, ſo iſt der Ort eine Ellipſe; liegt er auſſerhalb, ſo iſt der Ort eine Hyperbel, und wenn endlich der Kreis in eine gerade Linie übergeht; ſo iſt der Ort eine Parabel.

Da die Tangente den Winkel FMN halbirt, ſo iſt ſie auf der Mitte von FN ſenkrecht; folglich:

$$OF = \tfrac{1}{2} F_1N = a;$$

4) d. h. der Ort der Projectionen der Brennpunkte auf die Tangenten der Ellipſe und Hyperbel iſt ein über der erſten oder großen Axe beſchriebener Kreis. — In der Parabel reducirt ſich dieſer Kreis auf eine im Scheitel auf der Axe ſenkrechte Gerade.

Die Anwendung des Richtkreiſes erleichtert mehrere Conſtructionen. Sind z. B. ein Brennpunkt und drei Tangenten gegeben, und man fällt aus dem Brennpunkte Perpendikel auf die Tangenten, ſo iſt der Mittelpunkt des durch die drei Fußpunkte dieſer Perpendikel gehenden Kreiſes der Mittelpunkt der Curve. Verbindet man alsdann den Mittelpunkt mit dem gegebenen Brennpunkte, ſo hat man die erſte Axe, und die Punkte, wo ſie von dem Kreiſe geſchnitten wird, ſind die Scheitel der Curve.

§. 148.

Wenn man den Brennpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, ſo iſt die Gleichung einer Curve des zweiten Grades:

$$x^2 + y^2 - (mx + ny + t)^2 = 0.$$

Die Polare des Punktes (x_1, y_1) iſt:

$$x_1x+y_1y - (mx_1+ny_1+t)(mx+ny+t) = 0,$$

und wenn der Pol der Brennpunkt iſt; ſo reducirt ſich dieſe Gleichung auf:

$$mx + ny + t = o.$$

5) Die Richtlinie iſt alſo die Polare des Brennpunktes.

Wenn der Pol auf der Richtlinie liegt, ſo iſt die Gleichung der Polare:

$$x_1x + y_1y = o.$$

6) Die Polare eines Punktes der Richtlinie geht alſo durch den Brennpunkt und iſt zugleich auf dem von dem Brennpunkte nach dem Pole gehenden Vectorſenkrecht.

Wenn man von einem Punkte p der Richtlinie eine Sekante zieht, welche die Curve in a,a' und die Polare in q ſchneidet; ſo bilden die vier Geraden Fp, Fa, Fq, Fa' ein harmoniſches Büſchel, und da der Winkel pFq ein rechter iſt, ſo iſt Fq die Halbirungslinie von aFa'. Wenn i der Pol der Sekante iſt, ſo geht Fq durch i, und man hat folglich den Satz:

7) Wenn man an eine Curve des zweiten Grades von einem außerhalb derſelben liegenden Punkte zwei Tangenten zieht, ſo halbirt die von dem Brennpunkte nach dem gegebenen Punkte gehende Gerade den Winkel, welchen die von dieſem Brennpunkte nach den beiden Berührungspunkten gehenden Vectoren mit einander bilden.

Wenn der Brennpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten iſt, ſo iſt die Gleichung der Normale im Punkte (x, y) der Curve:

$$\frac{X - x}{x - m(mx+ny+t)} = \frac{Y - y}{y - n(mx+ny+t)}.$$

Läßt man die Axe der x durch den Punkt (x, y) gehen, ſo reducirt ſich die Gleichung der Curve auf:

$$x^2 - (mx + t)^2 = o \text{ oder } mx + t = \pm x$$

und die Gleichung der Normale wird:

$$\frac{X - x}{1 \mp m} = \frac{Y}{\mp n}.$$

Die Gleichung der auf der Richtlinie ſenkrechten erſten Axe iſt:

$$nX - mY = o,$$

und für den Durchſchnittspunkt der Normale mit der erſten Axe hat man:

$$\frac{X-x}{1\pm m}=\frac{-x}{1} \text{ oder } x-X=(1\mp m)x=\pm t.$$

Nun ist aber $x-X$ die Projection des zwischen der Curve und der ersten Axe liegenden Stückes der Normale auf den Radiusvector; und wenn man einen zweiten Punkt der Curve nimmt, so drehen sich die Coordinatenaxen um den Anfangspunkt, indem t ungeändert bleibt und der Ordinate des Punktes der Curve gleich ist, dessen Projection auf die erste Axe der Brennpunkt ist, d. h. dem Parameter p. Man hat also den Satz:

8) Die Projection des zwischen der Curve und der ersten Axe liegenden Theiles der Normale auf den von dem Brennpunkte nach dem Durchschnittspunkte der Normale mit der Curve gehenden Radiusvector ist constant und dem Parameter p gleich.

Uebungsaufgaben.

1) Eine Curve des zweiten Grades zu construiren, wenn man kennt:
   a) einen Brennpunkt und zwei Tangenten;
   b) einen Brennpunkt und drei Punkte der Curve;
   c) die Richtlinie und drei Punkte der Curve.
2) Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben ist:
   a) der Brennpunkt und zwei Tangenten;
   b) der Brennpunkt und zwei Punkte der Curve;
   c) der Brennpunkt, eine Tangente und ein Punkt der Curve;
   d) die Richtlinie und zwei Punkte der Curve.
3) Wenn M,M' zwei Punkte einer Parabel, A der Durchschnittspunkt der Tangenten in diesen beiden Punkten und F der Brennpunkt ist, zu beweisen, daß man hat:
$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{MF}}=\frac{\overline{AM'}^2}{\overline{M'F}}.$$
4) Man soll beweisen: daß in einer Curve des zweiten Grades sich das vom Brennpunkte auf eine Sehne gefällte Perpendikel und der zu dieser Sehne gehörige conjugirte Durchmesser auf der Richtlinie schneiden.
5) Man soll beweisen: daß ein Halbdurchmesser der Ellipse oder Hyperbel die mittlere Proportionale zwischen den von den Brennpunkten nach dem Endpunkte des conjugirten Durchmessers gezogenen Vectoren ist.

6) In der gleichseitigen Hyperbel ist der vom Mittelpunkte aus gezogene Radiusvector die mittlere Proportionale zwischen den von den Brennpunkten nach demselben Punkte der Curve gezogenen Vectoren, was bewiesen werden soll.

7) Man soll den Ort der Scheitel der Parabeln finden, welche eine Tangente und einen Brennpunkt gemeinschaftlich haben.

8) Den Ort des Scheitels einer Parabel zu finden, welche einen festen Brennpunkt hat, und durch einen festen Punkt geht.

9) Den Ort des Brennpunktes einer Parabel zu finden, welche einen festen Scheitel und einen festen Punkt, oder eine feste Tangente hat.

10) Man soll den Ort des Scheitels einer Hyperbel finden, welche eine feste Asymptote und Richtlinie hat.

11) Den Ort der Brennpunkte einer Hyperbel zu finden, welche eine feste Asymptote und einen festen Scheitel hat.

§. 149.

Wenn $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ die Entfernungen eines beweglichen Punktes M von festen Brennpunkten $F, F', F'', \ldots$ und $r, r', r'' \ldots$ die Entfernungen desselben Punktes von festen Geraden oder Richtlinien $D, D', D'', \ldots$ bezeichnen; so drückt eine Gleichung:

$$f(\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots; r, r', r'' \ldots) = 0 \qquad (1)$$

zwischen diesen Entfernungen eine ebene Curve aus, vorausgesetzt, daß die Brennpunkte und Richtlinien in derselben Ebene liegen.

Die Längen $r, r', r'', \ldots$ sind lineare Funktionen der Coordinaten x, y des Punktes M, und $\varrho^2, \varrho'^2, \varrho''^2, \ldots$ sind Funktionen des zweiten Grades, aber so beschaffen: daß die Differenz zwischen zwei beliebigen derselben eine lineare Funktion ist. Hieraus folgt:

1) Wenn die Relation (1) in Bezug auf $r, r', r'', \ldots$ und die Differenzen $\varrho^2 - \varrho'^2, \ldots$ linear ist, so ist der Ort des Punktes M eine Gerade.

2) Wenn dieselbe Relation in Beziehung auf $r, r', r'', \ldots; \varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ vom zweiten Grade ist und nur $\varrho^2, \varrho'^2, \varrho''^2, \ldots$ enthält; so ist der Ort des Punktes M eine Curve des zweiten Grades.

So drückt z. B. die Gleichung $rr' = m^2$ eine Hyperbel aus, welche die beiden Richtlinien zu Asymptoten hat; die Gleichung $r^2 + r'^2 = m^2$ eine Ellipse, deren Richtlinien die gleichen con-

jugirten Durchmeſſer ſind; die Gleichung $ar^2 \pm br'^2 = m^2$ eine Ellipſe, oder Hyperbel, worin die beiden Richtlinien ein Syſtem conjugirter Durchmeſſer bilden.

Aber dennoch gibt eine lineare Gleichung zwiſchen $\rho, \rho', \ldots$; $r, r', \ldots$ zuweilen eine Curve des zweiten Grades. — Dieſes iſt der Fall: 1) wenn die Entfernung ρ von einem Brennpunkte eine lineare Funktion der Entfernungen $r, r', r'', \ldots$ iſt, weil alsdann ρ eine lineare Funktion von x, y iſt, d. h. man kann für die verſchiedenen Richtlinien eine ſetzen, ſo daß man auf den gewöhnlichen Fall zurückkommt (144). 2) Wenn die Summe, oder Differenz der Entfernungen ρ, ρ' von zwei Brennpunkten conſtant iſt; denn da $(\rho+\rho')(\rho-\rho') = \rho^2 - \rho'^2$ und ein Faktor conſtant iſt, ſo iſt der andere linear, alſo auch die halbe Summe ρ der beiden Faktoren, ſo daß man auf den vorhergehenden Fall zurückkommt.

§. 149 a.

Eingeſchriebenes Viereck.

Wenn vier Gerade A, A'; B, B' gegeben ſind und das Produkt der Entfernungen r, r' des beweglichen Punktes von den beiden erſten ſteht zu dem Produkte der Entfernungen s, s' deſſelben Punktes von den beiden letzten in einem conſtanten Verhältniſſe; ſo beſchreibt der bewegliche Punkt eine Curve des zweiten Grades. — Die Gleichung (1) iſt in dieſem Falle:

$$\frac{rr'}{ss'} = m,$$

und wenn eine der Längen r, r' Null wird, ſo muß auch s oder s' Null werden. Die Curve geht alſo durch die Durchſchnittspunkte der Geraden A, A' mit B, B', ſo daß ſie um das Viereck $AA'BB'$ beſchrieben iſt, und wegen des willkürlichen Parameters m erhält man ſo alle um daſſelbe Viereck beſchriebene Curven des zweiten Grades. Man hat alſo den Satz:

8) Wenn in eine Curve des zweiten Grades ein Viereck beſchrieben iſt, ſo iſt das Produkt der Abſtände eines beliebigen Punktes der Curve von zwei Gegenſeiten des Viereckes zu dem Produkte der Abſtände deſſelben Punktes von den beiden andern Gegenſeiten in einem conſtanten Verhältniſſe.

Wenn die Gerade B' zu B parallel iſt und ſich der letztern

nähert, so nähern sich die auf A, oder A' liegenden beiden Ecken auch einander, und an der Grenze berühren A, A' die Curve in den Punkten, wo sie von B geschnitten wird. — Es steht also das Quadrat der Entfernung eines Punktes der Curve von einer Geraden zu dem Produkte seiner Abstände von zwei durch den Pol dieser Geraden gehenden Tangenten in einem constanten Verhältnisse.

§. 149 b.

Wenn man zwischen p und q eine Relation des zweiten Grades hat, so umhüllt die bewegliche Gerade $px + qy - 1 = 0$ eine Curve des zweiten Grades. Die Entfernung ϱ der beweglichen Geraden von einem festen Punkte (x_1, y_1) wird ausgedrückt durch:

$$\varrho = \frac{px_1 + qy_1 - 1}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

und wenn eine lineare Relation:

$$m_1 \varrho_1 + m_2 \varrho_2 + \ldots = k$$

zwischen den Abständen der beweglichen Geraden von n festen Punkten $F_1, F_2, \ldots$ gegeben ist; so hat man:

$$\frac{(m_1x_1+m_2x_2+\ldots)p+(m_1y_1+m_2y_2+\ldots)q-n}{\sqrt{p^2+q^2}} = k. \quad (\alpha)$$

Nun kann man aber immer einen Punkt (x, y) von solcher Beschaffenheit finden, daß:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots = nx,$$
$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots = ny$$

ist, so daß sich die Relation (α) auf:

$$\frac{px + qy - 1}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{k}{n}$$

reducirt. Da also die bewegliche Gerade stets dieselbe Entfernung von dem Punkte (x, y) behält, so umhüllt sie einen Kreis.

Wenn die zwischen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ gegebene Relation vom zweiten Grade ist und keine Glieder des ersten Grades enthält, so ist die Gleichung mit p und q auch vom zweiten Grade, und die bewegliche Gerade umhüllt eine Curve des zweiten Grades.

§. 149 c.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wo das Produkt der Abstände der beweglichen Geraden von zwei festen Punkten constant,

jugirten Durchmeſſer ſind; die Gleichung $ar^2 \pm br'^2 = m^2$ eine Ellipſe, oder Hyperbel, worin die beiden Richtlinien ein Syſtem conjugirter Durchmeſſer bilden.

Aber dennoch gibt eine lineare Gleichung zwiſchen $\varrho, \varrho', \ldots$; $r, r', \ldots$ zuweilen eine Curve des zweiten Grades. — Dieſes iſt der Fall: 1) wenn die Entfernung ϱ von einem Brennpunkte eine lineare Funktion der Entfernungen $r, r', r'', \ldots$ iſt, weil alsdann ϱ eine lineare Funktion von x, y iſt, d. h. man kann für die verſchiedenen Richtlinien eine ſetzen, ſo daß man auf den gewöhnlichen Fall zurückkommt (144). 2) Wenn die Summe, oder Differenz der Entfernungen ϱ, ϱ' von zwei Brennpunkten conſtant iſt; denn da $(\varrho+\varrho')(\varrho-\varrho') = \varrho^2 - \varrho'^2$ und ein Faktor conſtant iſt, ſo iſt der andere linear, alſo auch die halbe Summe ϱ der beiden Faktoren, ſo daß man auf den vorhergehenden Fall zurückkommt.

§. 149 a.

Eingeſchriebenes Viereck.

Wenn vier Gerade A, A'; B, B' gegeben ſind und das Produkt der Entfernungen r, r' des beweglichen Punktes von den beiden erſten ſteht zu dem Produkte der Entfernungen s, s' deſſelben Punktes von den beiden letzten in einem conſtanten Verhältniſſe; ſo beſchreibt der bewegliche Punkt eine Curve des zweiten Grades. — Die Gleichung (1) iſt in dieſem Falle:

$$\frac{rr'}{ss'} = m,$$

und wenn eine der Längen r, r' Null wird, ſo muß auch s oder s' Null werden. Die Curve geht alſo durch die Durchſchnittspunkte der Geraden A, A' mit B, B', ſo daß ſie um das Viereck $AA'BB'$ beſchrieben iſt, und wegen des willkürlichen Parameters m erhält man ſo alle um daſſelbe Viereck beſchriebene Curven des zweiten Grades. Man hat alſo den Satz:

8) Wenn in eine Curve des zweiten Grades ein Viereck beſchrieben iſt, ſo iſt das Produkt der Abſtände eines beliebigen Punktes der Curve von zwei Gegenſeiten des Viereckes zu dem Produkte der Abſtände deſſelben Punktes von den beiden andern Gegenſeiten in einem conſtanten Verhältniſſe.

Wenn die Gerade B' zu B parallel iſt und ſich der letztern

nähert, so nähern sich die auf A, oder A′ liegenden beiden Ecken auch einander, und an der Grenze berühren A, A′ die Curve in den Punkten, wo sie von B geschnitten wird. — Es steht also das Quadrat der Entfernung eines Punktes der Curve von einer Geraden zu dem Produkte seiner Abstände von zwei durch den Pol dieser Geraden gehenden Tangenten in einem constanten Verhältnisse.

§. 149 b.

Wenn man zwischen p und q eine Relation des zweiten Grades hat, so umhüllt die bewegliche Gerade $px + qy - 1 = o$ eine Curve des zweiten Grades. Die Entfernung ϱ der beweglichen Geraden von einem festen Punkte (x_1, y_1) wird ausgedrückt durch:

$$\varrho = \frac{px_1 + qy_1 - 1}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

und wenn eine lineare Relation:

$$m_1 \varrho_1 + m_2 \varrho_2 + \ldots = k$$

zwischen den Abständen der beweglichen Geraden von n festen Punkten F_1, F_2, . . . gegeben ist; so hat man:

$$\frac{(m_1x_1+m_2x_2+\ldots)p+(m_1y_1+m_2y_2+\ldots)q-n}{\sqrt{p^2+q^2}} = k. \quad (\alpha)$$

Nun kann man aber immer einen Punkt (x, y) von solcher Beschaffenheit finden, daß:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots = nx,$$
$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots = ny$$

ist, so daß sich die Relation (α) auf:

$$\frac{px + qy - 1}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{k}{n}$$

reducirt. Da also die bewegliche Gerade stets dieselbe Entfernung von dem Punkte (x, y) behält, so umhüllt sie einen Kreis.

Wenn die zwischen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, . . . gegebene Relation vom zweiten Grade ist und keine Glieder des ersten Grades enthält, so ist die Gleichung mit p und q auch vom zweiten Grade, und die bewegliche Gerade umhüllt eine Curve des zweiten Grades.

§. 149 c.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wo das Produkt der Abstände der beweglichen Geraden von zwei festen Punkten constant,

d. h. $\varrho\varrho_1 = k$ ist. Nimmt man den Punkt F zum Anfangspunkte und sind x_1, y_1 die Coordinaten von F_1, so hat man:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \varrho_1 = \frac{px_1 + qy_1 - 1}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

und die Parameter p, q unterliegen der Bedingung:

$$k(p^2+q^2) - (px_1 + qy_1 - 1) = 0.$$

Nach der Theorie der Umhüllungslinien ist aber:

$$\frac{2kp-x_1}{x} = \frac{2kq-y_1}{y} = \frac{px_1+qy_1-2}{1} = \frac{2k-x_1x-y_1y}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{x^2{}_1+y^2{}_1-4k}{2k-x_1x-y_1y},$$

und mithin die Gleichung der Umhüllungscurve:

$$x^2+y^2 - \frac{(x_1x+y_1y-2k)^2}{x^2{}_1+y^2{}_1-4k} = 0,$$

welche also eine Curve des zweiten Grades ist, die den Punkt F und wegen der Symmetrie auch F_1 zum Brennpunkte hat. — Man hat folglich den Lehrsatz:

9) Das Produkt der aus den beiden Brennpunkten einer Curve des zweiten Grades auf die Tangenten derselben gefällten Perpendikel ist eine constante Größe.

Es seien T, T′ (Fig. 177) zwei Lagen der beweglichen Geraden, so ist $\overline{FP} \cdot \overline{F'_1P_1} = \overline{FP'} \cdot \overline{F_1P'_1}$; die beiden Dreiecke PFP′, $P_1F_1P_1'$ sind einander ähnlich; folglich auch MPP′, M,PP′$_1$; mithin:

$$\overline{MP} : \overline{MP'_1} = \overline{PP'} : \overline{P_1P'_1} = \overline{FP} : \overline{F_1P'_1}.$$

Die beiden Dreiecke PFM, P'_1F_1M sind also einander ähnlich; mithin $\angle PMF = \angle P'_1MF_1$. Man hat also den Satz:

10) Wenn man von einem außerhalb einer Curve des zweiten Grades genommenen Punkte Tangenten an dieselbe zieht, so bilden diese Tangenten mit den von den beiden Brennpunkten nach dem äußern Punkte gehenden Geraden gleiche Winkel.

Als besondern Fall ist hierin der bekannte Satz enthalten: daß eine Tangente mit den beiden nach dem Berührungspunkte gehenden Vectoren gleiche Winkel bildet.

§. 150.

Umschriebenes Viereck.

Wenn das Produkt der Abstände p, p′ der beweglichen Geraden

von zwei festen Punkten a, a' zu dem Produkte der Entfernungen q, q' derselben Geraden von zwei andern festen Punkten b, b' in einem constanten Verhältnisse steht, so daß $\frac{pp'}{qq'} = k$ ist; so umhüllt die bewegliche Gerade eine Curve des zweiten Grades, welche die vier Geraden berührt, die man erhält, wenn man a oder a' mit b oder b' verbindet. Denn wenn p oder p' Null ist, so ist q oder q' auch Null; die Gerade fällt also in einer particulären Lage mit ab, . . . zusammen, und die Curve ist folglich in das Viereck ab a'b'a beschrieben. Wegen des willkürlichen Parameters k erhält man alle in dasselbe Viereck beschriebene Curven des zweiten Grades, und man hat daher folgenden Satz:

11) Wenn um eine Curve des zweiten Grades ein Viereck beschrieben ist, so steht das Produkt der Abstände einer beliebigen Tangente von zwei gegenüberliegenden Ecken des Vierecks zu dem Produkte der Abstände derselben Tangente von den beiden andern Ecken in einem constanten Verhältnisse.

Hieraus folgt: Wenn um eine Curve des zweiten Grades ein Winkel beschrieben ist, so steht das Produkt der Abstände einer beliebigen Tangente von den beiden Berührungspunkten der Schenkel dieses Winkels zu dem Quadrate ihres Abstandes von der Spitze des Winkels in einem constanten Verhältnisse.

§. 150 a.

Homofocale Curven.

Zwei Curven des zweiten Grades, welche dieselben Brennpunkte haben, heißen homofocale. Wenn man den Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, so ist die allgemeine Gleichung der homofocalen Curven:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1, \\ \text{oder:} \\ a^4 - a^2(x^2+y^2+c^2) + c^2x^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

worin c eine Constante und a ein veränderlicher Parameter ist. — Wird $a > c$ genommen, so hat man eine Ellipse, welche sich mit zunehmendem a immer mehr der Kreisform nähert

(Fig. 178). Läßt man a bis c abnehmen, so plattet sich die Ellipse immer mehr ab, und geht zuletzt in das zwischen den Brennpunkten liegende Stück FF_1 der großen Axe über.

Für $a < c$ erhält man Hyperbeln, und wenn a bis c wächst; so nimmt der Asymptotenwinkel bis Null ab, die beiden Theile desselben Hyperbelzweiges nähern sich einander immer mehr, und fallen zuletzt resp. mit FX und F_1X_1 zusammen. — Wenn a bis zu Null abnimmt, so wird der Asymptotenwinkel immer größer, und zuletzt fallen die Hyperbelzweige auf die Axe der y. — Man erhält also zwei Reihen homofocaler Curven, nämlich eine Reihe Ellipsen und eine Reihe Hyperbeln. Durch jeden Punkt der Ebene geht eine homofocale Ellipse und Hyperbel; denn die Gleichung (1) hat immer zwei reelle Wurzeln und gibt für a zwei Werthe, wovon der eine $< c$ und der andere $> c$ ist.

§. 150 b.

Eigenschaften der homofocalen Curven.

Wenn man eine homofocale Ellipse und Hyperbel beschreibt, welche durch einen Punkt M (Fig. 178) gehen, so halbirt die Tangente an der Ellipse den von dem einen Vector und der Verlängerung des andern gebildeten Winkel, und die Tangente an den Hyperbel der von beiden Vectoren gebildeten Winkel. Folglich durchschneiden eine homofocale Ellipse und Hyperbel sich unter einem rechten Winkel.

Wenn a, a_1 die Parameter einer homofocalen Ellipse und Hyperbel, und b, b_1 die zweiten Axen derselben sind; so wird der Durchschnittspunkt M derselben durch die simultanen Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2{}_1}-\frac{y^2}{b^2{}_1}=1,\ a^2-b^2=a^2{}_1+b^2{}_1=c^2$$

bestimmt, woraus folgt:

$$x=\frac{aa_1}{c},\ y=\frac{bb_1}{c}.$$

Wenn zwei homofocale Ellipsen (a), (a′) gegeben sind, so heißen die Punkte M, M_1, wo sie von einer homofocalen Hyperbel (a_1) geschnitten werden, correspondirende Punkte, und nach den vorhergehenden Gleichungen hat man:

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'},\ \frac{y}{b}=\frac{y'}{b'};$$

d. h. die Coordinaten correſpondirender Punkte verhalten ſich wie die Axen. — Hieraus folgt:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{x'^2}{a'^2}=\frac{x^2-x'^2}{a^2-a'^2},\quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{y'^2}{b'^2}=\frac{y^2-y'^2}{b^2-b'^2}=\frac{y^2-y'^2}{a^2-a'^2},$$

$$\frac{x^2-x'^2+y^2-y'^2}{a^2-a'^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=t,$$

$$x^2+y^2-(x'^2+y'^2)=a^2-a'^2.$$

Sind ferner N,N′ zwei andere correſpondirende Punkte und x_1, y_1; x'_1, y'_1 ihre Coordinaten; ſo hat man ebenſo:

$$x^2_1+y^2_1-(x'^2_1+y'^2_1)=a^2-a'^2.$$

Ferner iſt:

$$\overline{MN'}^2=(x-x'_1)^2+(y-y'_1)^2=x^2+y^2+x'^2_1+y'^2_1-2(xx'_1+yy'_1),$$

$$\overline{M'N}^2=(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2=x'^2+y'^2+x^2_1+y^2_1-2(x,x'+y,y'),$$

alſo:

$$\overline{MN'}^2-\overline{M'N}^2=0,\text{ oder } MN'=M'N;$$

d. h. die ſich durchkreuzenden Verbindungslinien zweier Paare correſpondirender Punkte auf zwei homofocalen Ellipſen ſind gleich lang.

Dieſer Satz findet auch noch ſtatt, wenn zwei homofocale Hyperbeln von einer veränderlichen Ellipſe geſchnitten werden.

Die Gerade:

$$mx+ny+t=0$$

hat in der homofocalen Curve (a) zum Pole:

$$\frac{x_1}{ma^2}=\frac{y_1}{n(a^2-c^2)}=1=\frac{nx_1-my_1}{mnc^2},$$

und die von dem veränderlichen Parameter a unabhängige Gleichung:

$$nx_1-my_1-mnc^2=0$$

drückt den Ort der Pole der gegebenen Geraden in Beziehung auf die verſchiedenen homofocalen Curven aus. — Man hat daher den Satz:

Der Ort der Pole derſelben Geraden in Beziehung auf verſchiedene homofocale Curven iſt eine auf der gegebenen ſenkrechte Gerade.

Von den homofocalen Curven berührt eine die gegebene Gerade, indem der Berührungspunkt der Fußpunkt des Perpendikels iſt.

Wenn zwei homofocale Ellipſen (a), (a′) gegeben ſind, und

man zieht von einem Punkte P (Fig. 179) der größern zwei Tangenten PM, PM' an die kleinere; ſo machen dieſe Tangenten mit PF und PF_1 gleiche Winkel, und haben folglich gegen die in P an die erſte Ellipſe gezogene Tangente $B_1 B$ gleiche Neigung. — Wenn alſo ein Lichtſtrahl an der innern Seite der großen Ellipſe ſucceſſive Zurückwerfungen erfährt, ſo berührt er ſtets die kleinere homofocale Ellipſe.

§. 151.

Homofocale Parabeln.

Wenn Parabeln denſelben Brennpunkt und dieſelbe Axe haben, ſo heißen ſie homofocale. — Nimmt man den gemeinſchaftlichen Brennpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, und die gemeinſchaftliche Axe zur Axe der x, ſo werden die homofocalen Parabeln durch die Gleichung:

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \qquad (5)$$

ausgedrückt, worin p ein willkürlicher Parameter iſt.

Poſitive Werthe von p geben eine Reihe Parabeln, welche auf der Seite der poſitiven x liegen. Nimmt p bis Null ab, ſo nähert ſich der Scheitel dem Brennpunkte F (Fig. 180) und die beiden Zweige der Parabel nähern ſich gegenſeitig, ſo daß ſie zuletzt mit dem Theile FX der Axe zuſammenfallen. Nimmt dagegen p gegen $+\infty$ zu, ſo entfernt ſich der Scheitel gegen die Linke und die beiden Curvenzweige gehen immer weiter auseinander.

Negative Werthe von p geben eine zweite Reihe Parabeln, welche auf der Seite der negativen x liegen, und dieſelben Umſtände darbieten, wie die erſte Reihe.

Durch jeden Punkt (x, y) der Ebene gehen zwei homofocale Parabeln, und zwar von jeder Reihe eine; denn die Gleichung (5) gibt für p zwei Werthe, einen poſitiven und einen negativen.

Wenn man den Brennpunkt F_1 feſt liegen und F dagegen ſich ins Unendliche entfernen läßt auf der Axe der poſitiven x; ſo wird die Reihe der homofocalen Ellipſen die erſte Reihe der Parabeln, und die Reihe der Hyperbeln die zweite Parabelreihe, ſo daß ſich die obigen Lehrſätze auch auf homofocale Parabeln erſtrecken laſſen, wenn man zwei Parabeln derſelben Reihe als zwei homofocale Ellipſen, und zwei Parabeln, wovon die eine aus der

einen und die andere aus der andern Reihe iſt, als eine homofocale Ellipſe und Hyperbel betrachtet.

Uebungsaufgaben.

1) Man ſoll die Einhüllungscurve der Polaren deſſelben Punktes in Beziehung auf verſchiedene homofocale Curven finden.
2) Den Ort der Berührungspunkte der von einem feſten Punkte an die verſchiedenen homofocalen Curven gezogenen Tangenten zu finden.
3) Ebenſo den Ort der Durchſchnittspunkte der Normalen mit den Curven.
4) Desgleichen den Ort der Projectionen des feſten Punktes auf ſeine Polaren.
5) Ein rechter Winkel bewegt ſich in der Ebene zweier homofocaler Curven des zweiten Grades ſo, daß der eine ſeiner Schenkel die eine Curve, und der andere die andere fortwährend berührt; man ſoll den von der Spitze des Winkels beſchriebenen Ort finden.

Einundzwanzigſtes Kapitel.

Symboliſche Geometrie.

§. 151.

Imaginäre Punkte.

Bekanntlich drückt ein Syſtem reeller Werthe von x, y einen Punkt der Ebene aus, und wir wollen ein Syſtem imaginärer Werthe von x, y nach der Analogie einen imaginären Punkt nennen. Um ferner unſern Ausdrücken die völlige Allgemeinheit algebraiſcher Symbole zu geben, verſtehen wir unter Linie die Geſammtheit der reellen und imaginären Auflöſungen der Gleichung $f(x, y) = 0$, ſo daß eine gerade Linie, oder eine Curve des zweiten Grades weiter nichts, als eine Gleichung des erſten, oder zweiten Grades mit beliebigen reellen, oder imaginären Coefficienten iſt. — Eine Gleichung mit reellen Coefficienten drückt gewöhnlich eine reelle Curve und eine unendliche Menge

paarweiſe conjugirter imaginärer Punkte aus, wogegen eine Gleichung mit imaginären Coefficienten eine unendliche Menge imaginärer Punkte und eine endliche Anzahl reeller Punkte ausdrückt, indem die letzte Zahl höchſtens dem Quadrate des Grades der Gleichung gleich iſt. — So hat z. B. die imaginäre Gerade:

$$y = (\alpha + \beta\sqrt{-1})x + \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

nur den einen reellen Punkt:

$$\beta x + \delta = 0,\quad y = \alpha x + \gamma.$$

Die durch zwei conjugirte imaginäre Punkte gehende Gerade iſt reell. — Die gemeinſchaftlichen Punkte zweier Linien ſind nichts anders, als die gemeinſchaftlichen Auflöſungen zweier Gleichungen. — Eine gerade Linie ſchneidet eine Linie des m^{ten} Grades im Allgemeinen in m reellen, oder imaginären Punkten.

§. 152.

Imaginäre Längen.

Unter der gegenſeitigen Entfernung zweier Punkte (x', y'), (x'', y'') verſtehen wir bei rechtwinkligen Axen den Ausdruck:

$$D = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Wenn M_0 oder (x_0, y_0) ein Punkt einer Geraden A_1A iſt, ſo iſt ihre Gleichung:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \pm\rho,$$

wo p und q der Relation $p^2 + q^2 = 1$ genügen (§. 20). — Für die beiden Hälften derſelben M_0A und M_0A_1 hat man:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \rho,\quad \frac{x - x_0}{-p} = \frac{y - y_0}{-q} = \rho,$$

ſo daß alſo auch auf einer imaginären Geraden zwei entgegengeſetzte Richtungen unterſchieden werden. — Es ſeien M' und M'' oder (x', y'), (x'', y'') zwei Punkte, welche auf der halben Geraden M_0A ſo liegen, daß M'' auf M'A liegt; ſo hat man:

$$\frac{x' - x_0}{p} = \frac{y' - y_0}{q} = M_0M',\quad \frac{x'' - x_0}{p} = \frac{y'' - y_0}{q} = M_0M'',$$

$$\frac{x'' - x'}{p} = \frac{y'' - y'}{q} = M'M'',$$

folglich:

$$M_0M'' = M_0M' + M'M''.$$

Imaginäre Längen werden also wie reelle addirt und subtrahirt, und man kann sagen: daß der Punkt M' zwischen M_0 und M'' liegt. — Durchläuft man also auf einer imaginären Geraden successive in dem einen und andern Sinne verschiedene Längen, und betrachtet die nach dem einen Sinne durchlaufenen als positiv; so müssen die in dem entgegengesetzten Sinne durchlaufenen als negativ angesehen werden.

Nach unserer Definition ist die Länge eine imaginäre Größe, deren Argument zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h. deren reeller Bestandtheil positiv ist, so daß die Vergleichung der Längen auf die dieser reellen Bestandtheile zurückkommt, und eine Länge größer als eine andere genannt wird, wenn ihr reeller Bestandtheil größer als der der letztern ist.

§. 153.

Imaginäres Dreieck.

Drei durch ihre Coordinaten bestimmte Punkte bilden ein Dreieck; die gegenseitigen Entfernungen dieser Punkte sind die Seiten a, b, c des Dreieckes, und die Winkel desselben werden durch die Formeln:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A},$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log (\cos A + \sqrt{-1} \sin A)$$

bestimmt, worin alle Eigenschaften der Dreiecke enthalten und auf imaginäre Dreiecke erstreckt sind. — Die Fläche eines Dreieckes ist die Hälfte des Produktes aus seiner Grundlinie und Höhe, und die verschiedenen Ausdrücke dieser Fläche gelten auch für imaginäre Dreiecke. — Wenn man auf der Seite BC zwischen B und C einen Punkt D nimmt und denselben mit A verbindet; so heißt die Gerade AD in dem Winkel A liegend; sie theilt das Dreieck, und mithin auch den Winkel A in zwei Theile, wie sich leicht zeigen läßt. — Wenn ein gegebenes Vieleck durch Gerade, welche in seinen Winkeln liegen, in Dreiecke zerlegt werden kann; so findet auch der bekannte Satz über die Winkelsumme jetzt noch statt.

§. 154.

Imaginäre Winkel.

Der von zwei halben Geraden M_0A, M_0A' oder:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\varrho,\ \frac{x'-x_0}{p'}=\frac{y'-y_0}{q'}=\varrho'$$

gebildete Winkel φ ergibt sich leicht; denn wenn man auf den beiden Geraden von ihrem Durchschnittspunkte (x_0, y_0) aus zwei Längen ϱ, ϱ' nimmt, so gibt das dadurch bestimmte Dreieck:

$$\cos\varphi = pp' + qq'.$$

Die beiden entgegengesetzten Hälften M_0A_1 und $M_0A'_1$ geben für $\cos\varphi$ denselben Werth, während die beiden Hälften M_0A_1 und M_0A' zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für $\cos\varphi$ geben. Mithin sind zwei Scheitelwinkel einander gleich, und zwei Nebenwinkel ergänzen einander zu zwei rechten; ꝛc. ꝛc.

Zwei halbe Gerade, für welche p und q einerlei Werthe haben, sind **parallel**. Zwei Winkel, deren Schenkel **parallel** sind, sind einander **gleich**; ꝛc. ꝛc.

Für eine vom Anfangspunkte O ausgehende halbe Gerade OA hat man:

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\varrho,$$

und wenn α, β die Winkel bezeichnen, welche sie mit den beiden Halbaxen OX, OY bildet; so ist $\cos\alpha = p$, $\cos\beta = q$, also $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Es können hier mehrere Fälle vorkommen.

Wenn:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{\cos^2\alpha} \text{ und } \cos\beta = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\beta}$$

ist, so hat man $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, und die halbe Gerade OA liegt in dem Winkel YOX, so daß in diesem Falle die Winkel α, β **spitz** sind.

Wenn:

$$\cos\alpha = -\sqrt{\cos^2\alpha} \text{ und } \cos\beta = -\sqrt{\cos^2\beta}$$

ist, so hat man $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$, OA liegt in dem Winkel YOX_1, α ist **spitz** und β **stumpf**.

Um alle Fälle in die eine Formel $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ zuſammenzufaſſen, ſetzen wir:

$$\sin \alpha = \cos \beta,$$

folglich:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log (\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \cos \beta),$$

und alsdann beſtimmt der auf dieſe Weiſe definirte Winkel α die Lage von OA vollſtändig. — Wenn $\sin \alpha = \sqrt{\sin^2 \alpha}$ iſt, ſo liegt OA auf derſelben Seite der Axe der x als die Halbare OY, und wenn $\sin \alpha = -\sqrt{\sin^2 \alpha}$ iſt; ſo liegt OA auf der andern Seite.

Das Vorhergehende läßt ſich leicht verallgemeinern und auf imaginäre Coordinatenaxen ausdehnen. Der Fundamentalſatz von den Projectionen gilt ebenfalls für ein imaginäres Vieleck und eine imaginäre Axe, ſo wie alle Folgerungen daraus gültig bleiben, und insbeſondere die Formeln zur Transformation der Coordinaten bei imaginären Axen dieſelben bleiben, wie bei reellen.

§. 155.

Imaginärer Kreis.

Der Kreis oder der Ort der von einem Mittelpunkte gleichweit entfernten Punkte hat zur Gleichung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0,$$

wo a, b und r drei reelle, oder imaginäre willkürliche Conſtanten ſind. — Eine Gerade ſchneidet den Kreis im Allgemeinen in zwei Punkten, und wenn dieſe beiden Punkte in einen zuſammenfallen; ſo wird die Sekante zur Tangente. — Die verſchiedenen Sätze, welche in der Elementargeometrie vom Kreiſe bewieſen werden, erſtrecken ſich auch auf den imaginären Kreis, indem die Beweiſe dieſelben bleiben, oder der Form nach etwas abgeändert werden. Z. B. das aus dem Mittelpunkte auf eine Sehne gefällte Perpendikel theilt dieſe Sehne in zwei gleiche Theile; denn die Sehne iſt die Grundlinie eines gleichſchenkligen Dreieckes, welches durch das Perpendikel in zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke getheilt wird. — Das Perpendikel im Endpunkte eines Halbmeſſers iſt eine Tangente; gleichen Mittelpunktswinkeln entſprechen gleiche Sehnen; ꝛc.

Auch die gewöhnlichen Definitionen der trigonometrischen Größen finden bei dem imaginären Kreise statt.

In dem Vorhergehenden haben wir die Grundlagen einer *symbolischen Geometrie* angedeutet, welche allgemeiner ist, als die gewöhnliche Geometrie, und worin sich die Lehrsätze nicht auf *Figuren*, sondern auf *Symbole* beziehen, welche nur in gewissen besondern Fällen durch Figuren dargestellt werden; und nur der Deutlichkeit wegen haben wir diesen Symbolen die gewöhnlichen Namen der entsprechenden Figuren gegeben. — Sind die Grundlagen dieser symbolischen Geometrie einmal gewonnen, so ergeben sich sämmtliche Lehrsätze auf synthetischem Wege, wie in der gewöhnlichen Geometrie, so daß die synthetischen Schlüsse die Stelle der algebraischen Operationen, namentlich die Transformationen und Combinationen der Gleichungen vertreten. — Diese symbolische Geometrie liefert ein schätzbares Erfindungsmittel und erleichtert die Aufsuchung wichtiger analytischer Eigenschaften der Gleichungen. Wird sie dagegen auf die Untersuchung der Eigenschaften der Figuren angewandt, so bildet sie eine neue geometrische Methode; denn oft wird ein durch diese Methode gefundener abstracter Satz in den Fall der *Realität* übertragen, und zwar durch einen geometrischen Satz, welchen man durch die Betrachtung einer *reellen* Figur entweder gar nicht, oder wenigstens nicht einfach genug erhalten kann. Kurz: durch Anwendung *imaginärer Symbole* werden die Betrachtungen *verallgemeinert*, wie wir in der Folge an vielen Beispielen sehen werden, und man kann von dieser Methode mit Recht sagen: daß sie die *Einfachheit* der geometrischen und die *Allgemeinheit* der analytischen Methode in sich vereinigt.

§. 156.

Imaginäre Tangenten.

Wenn zwei Punkte, worin eine Gerade eine Curve schneidet, sich unbeschränkt einander nähern; so wird diese Gerade *Tangente*. — Die frühern Methoden der Tangententheorie (Kap. 5 u. 6) sind *allgemein*, und folglich hat die Tangente in einem beliebigen reellen, oder imaginären Punkte die Form (A) in §. 56. — Von einem Punkte kann man an eine Curve des $m$ten Grades $m(m-1)$ Tangenten ziehen, z. B. von einem innerhalb einer *reellen* Ellipse liegenden Punkte zwei *conjugirte imaginäre*

Tangenten, für welche die Berührungssehne reell ist. — Wir können daher unsere frühere Theorie der Pole und Polaren (Kap. 19) verallgemeinern, und definiren: die Polare eines Punktes ist die diesem Punkte entsprechende Berührungssehne. — Alsdann verschwinden alle Beschränkungen und die Lehrsätze müssen im ausgedehntesten Sinne genommen werden. — Wenn in dem Lehrsatze 1 der Punkt p außerhalb liegt, so mußten wir uns früher auf die die Curve wirklich schneidenden Sekanten beschränken, welches nur den außerhalb der Curve liegenden Theil der Polare gab. — Wenn aber die Sekante die Curve nicht schneidet, so sind die Durchschnittspunkte, und folglich die beiden Tangenten imaginär conjugirt, was einen reellen Vereinigungspunkt gibt, und man erhält auf diese Weise den innern Theil der Polare.

§. 157.

Durchschnitt zweier Curven des zweiten Grades.

Zwei Curven des zweiten Grades schneiden sich in 4 Punkten, und wenn man dieselben paarweise verbindet, so erhält man 3 Paare gemeinschaftlicher Sekanten, so daß der Durchschnittspunkt jedes Paares in beiden Curven die durch die beiden andern Durchschnittspunkte gehende Gerade zur gemeinschaftlichen Polare hat.

Wenn die beiden Curven reell sind, so sind die 4 gemeinschaftlichen Punkte reell, oder imaginär conjugirt, und man hat 3 Fälle zu betrachten: 1) Es sind 4 Punkte reell. — Alsdann sind die 6 Sekanten reell, und 3 reelle Punkte haben in beiden Curven dieselben Polaren. 2) Es sind 2 Punkte reell und 2 imaginär. — Alsdann sind 2 Sekanten reell, nämlich die, welche durch die beiden reellen, und die, welche durch die beiden imaginären Punkte geht. Jedes der beiden andern Paare besteht aus 2 conjugirten imaginären Sekanten, und 3 reelle Punkte haben dieselben Polaren. — 3) Die 4 Punkte sind imaginär. — In diesem Falle ist ein Paar gemeinschaftlicher Sekanten reell, und ein einziger reeller Punkt hat dieselbe Polare.

Die allgemeine Gleichung der durch 4 Punkte gehenden Curven des zweiten Grades ist von der Form:

$$F(x, y)+\lambda(mx+ny+t)(m'x+n'y+t') = o, \qquad (1)$$

wo $F(x, y) = o$ eine dieser Curven, $mx + ny + t = o$, so wie

$m'x+n'y+l'=0$ eine gemeinſchaftliche Sekante und λ ein willkürlicher Parameter iſt.

Wenn man die beiden gemeinſchaftlichen Sekanten zu den Coordinatenaxen nimmt, ſo reducirt ſich die Gleichung (1) auf:

$$F + \lambda xy = 0. \qquad (2)$$

Den Ort der Mittelpunkte dieſer verſchiedenen Curven erhält man, wenn man λ zwiſchen den Gleichungen:

$$F'_x + \lambda y = 0, \quad F'_y + \lambda x = 0$$

eliminirt, wodurch man erhält:

$$x F'_x - y F'_y = 0,$$

d. h. eine durch den Anfangspunkt gehende Curve des zweiten Grades.

Die Gleichung (2) kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$ax^2 + \lambda xy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

und die Polare eines Punktes (x_1, y_1) iſt:

$$(2ax_1+d)x+(2cy_1+e)y+dx_1+ey_1+2f+\lambda(xy_1+yx_1)=0. \quad (3)$$

Gibt man λ zwei verſchiedene Werthe, ſo müſſen, damit die Polare dieſelbe wird, ſich die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(2ax_1+d)x+(2cy_1+e)y+dx_1+ey_1+2f=0\\ y_1x+x_1y=0\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

auf eine reduciren. Es muß alſo entweder $x_1=0$, $y_1=0$, oder:

$$dx_1 + ey_1 + 2f = 0$$

und:

$$\frac{2ax_1 + d}{y_1} = \frac{2cy_1 + e}{x_1}$$

oder:

$$2ax^2_1 - 2cy^2_1 + dx_1 - ey_1 = 0$$

ſein. — Außer dem Anfangspunkte erhalten wir alſo zwei andere auf der Polare dieſes Anfangspunktes liegende Punkte. — In zwei Curven des zweiten Grades ſind folglich die Durchſchnittspunkte der gemeinſchaftlichen Sekantenpaare die einzigen Punkte, welche dieſelben Polaren haben, und der gemeinſchaftliche Punkt von (4) gehört offenbar allen Polaren (3) an. — Man hat alſo den Satz:

1) Die Polaren eines Punktes der Ebene in Beziehung auf verſchiedene, um daſſelbe Viereck beſchriebene Curven des zweiten Grades gehen alle durch denſelben Punkt.

§. 158.

Curven des zweiten Grades, welche 4 Gerade berühren.

In dem in §. 87 erwähnten Coordinatenſyſteme werden zwei

Curven durch zwei Gleichungen zwiſchen den Veränderlichen p, q ausgedrückt, und jede gemeinſchaftliche Auflöſung dieſer beiden Gleichungen gibt eine Gerade, welche beide Curven zugleich berührt, ſo daß man reelle, oder imaginäre gemeinſchaftliche Tangenten erhält. Da zwei Curven des zweiten Grades durch zwei Gleichungen ausgedrückt werden, welche in Bezug auf p und q vom zweiten Grade ſind; ſo folgt: daß dieſe Curven 4 gemeinſchaftliche Tangenten haben. — Die drei Diagonalen des um die beiden Curven beſchriebenen Viereckes bilden ein Dreieck, wovon jede Winkelſpitze die Gegenſeite zur gemeinſchaftlichen Polare hat (§. 137). Man hat alſo den Satz:

2) Die drei Diagonalen des um zwei Curven des zweiten Grades beſchriebenen Viereckes bilden ein Dreieck, deſſen Ecken die Durchſchnittspunkte der drei gemeinſchaftlichen Sekantenpaare ſind..

Die allgemeine Gleichung der Curven des zweiten Grades, welche 4 Gerade berühren, läßt ſich auf folgende Form bringen:

$$F(p,q) - \lambda(p\alpha+q\beta+1)(p\alpha'+q\beta'+1) = o, \qquad (5)$$

wo $F(p, q) = o$ irgend eine dieſer Curven iſt, (α, β), (α', β') zwei gegenüberliegende Ecken ſind und λ einen willkürlichen Parameter bezeichnet. Denn zwei Werthesyſteme von p und q reduciren zugleich $F(p, q)$ und den Faktor $p\alpha + q\beta + 1$ auf Null, und genügen mithin der Gleichung (5), was auch λ ſein mag; ſie geben zwei durch den Punkt (α, β) gehende gemeinſchaftliche Tangenten, und die beiden andern gehen durch den Punkt (α', β').

Betrachten wir die Curve des zweiten Grades:

$$F = ap^2 + bpq + cq^2 + dp + eq + f = o,$$

ſo wird der Pol (x_1, y_1) der Geraden (p_1, q_1) durch die Relationen:

$$\frac{2ap_1+bq_1+d}{x_1} = \frac{2cq_1+bp_1+e}{y_1} = \frac{dp_1+eq_1+2f}{1} \qquad (6)$$

beſtimmt, welche denen in §. 134 analog ſind. — Denn dieſe Gerade trifft die Curve in einem Punkte (x, y), welcher der Gleichung:

$$p_1x+q_1y+1=o$$

genügt. Die Tangente in dieſem Punkte iſt aber nach §. 87:

$$\frac{2ap+bq+d}{x} = \frac{2cq+bp+e}{y} = \frac{dp+cq+2f}{1}$$
$$= \frac{2app_1+b(p_1q+q_1p)+2cqq_1+d(p+p_1)+e(q+q_1)+2f}{p_1x+q_1y+1},$$

und da der Nenner = o ist, so muß auch der Zähler = o sein; folglich:

$$(2ap_1+bq_1+d)p+(2cq_1+bp_1+e)q+dp_1+eq_1+2f=o.$$

Es gehen also alle Tangenten in den Punkten der Curve, wo diese von der Geraden (p_1, q_1) geschnitten wird, durch den durch die Relationen (6) bestimmten Punkt (x_1, y_1), und mithin ist dieser Punkt der Pol der Geraden.

Wenn man diese Formeln auf die Curve (5) anwendet, so erhält man:

$$\frac{F'_{p_1}-\lambda\alpha'(p_1\alpha+q_1\beta+1)-\lambda\alpha(p_1\alpha'+q_1\beta'+1)}{x_1}=\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots},$$

und wenn man die durch die beiden gegenüberliegenden Ecken (α, β), (α', β') gehende Diagonale zur Polare nimmt; so verschwindet der willkürliche Parameter λ, woraus folgt: daß diese Diagonale in allen Curven des zweiten Grades denselben Pol hat. —

Verlegt man den Anfangspunkt in den Punkt (α', β'), so reducirt sich die Gleichung (5) auf:

$$F-\lambda(p\alpha+q\beta+1)=o,$$

und die Gerade (p_1, q_1) hat zum Pole:

$$\frac{F'_{p_1}-\lambda\alpha}{x_1}=\frac{F_{q_1}-\lambda\beta}{y_1}=\frac{dp_1+eq_1+2f-\lambda(p_1\alpha+q_1\beta+2)}{1}$$

$$=\frac{\beta F'_{p_1}-\alpha F'_{q_1}}{\beta x_1-\alpha y_1}=\frac{F'_{p_1}(p_1\alpha+q_1\beta+2)-\alpha(dp_1+eq_1+2f)}{x_1(p_1\alpha+q_1\beta+2)-\alpha},$$

woraus sich eine von λ unabhängige Gleichung des ersten Grades mit x_1 und y_1 ergibt, so daß man also folgenden Lehrsatz hat:

3) Der Ort der Pole derselben Geraden in Bezug auf verschiedene in dasselbe Viereck beschriebene Curven des zweiten Grades ist eine Gerade. —

Läßt man die Gerade sich ins Unendliche entfernen, so wird der Pol Mittelpunkt. Folglich ist der Ort der Mittelpunkte der in dasselbe Viereck beschriebenen Curven des zweiten Grades eine Gerade. — Jede der drei Diagonalen kann als eine in das Viereck beschriebene Ellipse betrachtet werden, deren kleine Axe Null ist, und mithin geht die fragliche Gerade durch die Mitten der drei Diagonalen, was ein einfaches Mittel zur Bestimmung des Mittelpunktes einer 5 gegebene Gerade berührenden Curve des zweiten Grades an die Hand gibt. Denn verbindet man die Mitten der Diagonalen des von zwei Combinationen dieser 5 Geraden gebildeten Viereckes, so ist der Durch-

ſchnittspunkt der beiden ſo erhaltenen Geraden der geſuchte Mittelpunkt, worauf die Curve ſelbſt leicht conſtruirt werden kann. — Soll man eine Parabel conſtruiren, welche 4 gegebene Gerade berührt, ſo gibt die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen des Viereckes die Richtung der Axe und die weitere Conſtruction iſt dieſelbe.

§. 159.

Curven des zweiten Grades, welche eine doppelte Berührung haben.

Wenn zwei gegenüberliegende gemeinſchaftliche Sekanten zweier Curven des zweiten Grades ſich unendlich nähern, ſo berühren ſich dieſe Curven in zwei reellen, oder imaginären Punkten, und die Gleichung dieſer Curven iſt:

$$F(x, y) - \lambda (mx + ny + t)^2 = o,$$

wo $F(x, y) = o$ eine dieſer Curven, $mx + ny + t = o$ die Berührungsgerade und λ ein willkürlicher Parameter iſt.

In dem Syſteme der Tangentialcoordinaten wäre die Gleichung:

$$F(p, q) - \lambda (p\alpha + q\beta + 1)^2 = o,$$

wo α, β die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der beiden gemeinſchaftlichen Tangenten ſind.

Wenn zwei Curven des zweiten Grades eine doppelte Berührung haben, ſo ſind die Berührungspunkte reell, oder imaginär conjugirt, und folglich iſt die Berührungsgerade, ſo wie ihr Pol reell.

Zweiundzwanzigſtes Kapitel.

Anharmoniſches Verhältniß.

§. 160.

Wenn vier in gerader Linie liegende Punkte a, b, c, d gegeben ſind, ſo wird der Quotient aus den Verhältniſſen der Entfernungen zweier dieſer Punkte von den beiden andern das anharmoniſche Verhältniß derſelben genannt, ſo daß man die drei anharmoniſchen Verhältniſſe:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc}$$

und die umgekehrten derſelben bilden kann, wobei die in einem gewiſſen Sinne genommenen Längen als poſitiv und die in entgegengeſetztem Sinne genommenen als negativ zu betrachten ſind.

Durch irgend eins dieſer Verhältniſſe werden alle übrigen beſtimmt. Denn bezeichnen p, q, r die Abſtände des Punktes a von den drei andern b, c, d und x, y, z die drei Verhältniſſe; ſo hat man:

$$x = \frac{q\,(r-p)}{r\,(q-p)}, \quad y = \frac{r\,(p-q)}{p\,(r-q)}, \quad z = \frac{p\,(q-r)}{q\,(p-r)},$$

woraus folgt:

$$y = \frac{1}{1-x}, \quad z = \frac{1}{1-y}, \quad x = \frac{1}{1-z}.$$

Die drei Verhältniſſe ergeben ſich alſo nach demſelben Geſetze auseinander. — Wenn zwei Gruppen von vier Punkten zwei gleiche anharmoniſche Verhältniſſe geben, ſo werden die auf gleiche Weiſe in dieſen Verhältniſſen vorkommenden Punkte als correſpondirende betrachtet, und alle übrigen anharmoniſchen Verhältniſſe ſind beiderſeitig auch gleich.

§. 161.

Wenn vier durch denſelben Punkt O gehende Gerade A, B, C, D gegeben ſind, ſo heißt die Größe:

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)}$$

das anharmoniſche Verhältniß derſelben. — Zieht man durch das Büſchel dieſer Geraden eine beliebige Sekante, welche jene in den vier Punkten a, b, c, d ſchneidet, ſo iſt das anharmoniſche Verhältniß der vier Geraden dem anharmoniſchen Verhältniſſe der vier Punkte gleich. Denn bezeichnet h das von dem Punkte O auf die Sekante gefällte Perpendikel, ſo hat man:

$$ac = \frac{oa \cdot oc \cdot \sin(A, C)}{h}, \ldots$$

folglich:

$$\frac{ac \cdot bd}{ad \cdot bc} = \frac{oa \cdot ob \cdot oc \cdot od \cdot \sin(A, C) \cdot \sin(B, D)}{oa \cdot od \cdot ob \cdot oc \cdot \sin(A, D) \cdot \sin(B, C)} = \frac{\sin(A, C) \cdot \sin(B, D)}{\sin(A, D) \cdot \sin(B, C)}.$$

Alle durch daſſelbe Strahlenbüſchel gezogenen Sekanten geben alſo daſſelbe anharmoniſche Verhältniß. — Wenn eins dieſer Ver-

hältniſſe $= -1$ iſt, ſo ſind die beiden andern $= \frac{1}{2}$ und $= 2$ und die drei umgekehrten kommen auf die vorhergehenden zurück. In dieſem Falle ſagt man: daß die vier Punkte, oder die vier Geraden ein harmoniſches Syſtem bilden (§. 33).

§. 162.

Involution.

Wenn auf einer Geraden 6 paarweiſe conjugirte Punkte a, a'; b, b'; c, c' gegeben ſind, und es iſt:

$$pa \cdot pa' = pb \cdot pb' = pc \cdot pc' = k, \qquad (1)$$

wo p ein gewiſſer Punkt derſelben Geraden iſt; ſo ſagt man: die 6 Punkte bilden eine Involution. — Mit Hülfe der 4 Punkte a, a'; b, b' kann man zunächſt p durch die Bedingung:

$$pa \cdot pa' = pb \cdot pb' = k$$

beſtimmen; denn wenn die Längen aa', ab, ab' bekannt ſind, ſo wird die Unbekannte durch eine Gleichung des erſten Grades beſtimmt. Wird alsdann der Punkt c willkürlich angenommen, ſo wird der conjugirte Punkt c' durch die Relation:

$$pc \cdot pc' = k$$

beſtimmt. Auf beiden Seiten von p gibt es in dem Abſtand $\sqrt{k}$ zwei Punkte g, h, welche ihre eigenen conjugirten ſind — und zwei beliebige conjugirte Punkte a, a' ſind die harmoniſch conjugirten von g und h.

Sechs Punkte, welche eine Involution bilden, haben die Eigenſchaft: daß das anharmoniſche Verhältniß von vier derſelben dem anharmoniſchen Verhältniſſe der vier conjugirten Punkte gleich iſt. Denn wenn a, a', b, b' die vier betrachteten Punkte ſind, ſo ſind a', a, b', b die vier conjugirten Punkte, und man hat offenbar:

$$\frac{ba}{ba'} : \frac{b'a}{b'a'} = \frac{b'a'}{b'a} : \frac{ba'}{ba}.$$

Nimmt man nun die vier Punkte a, a', b, c und die vier conjugirten a', a, b', c', ſo geben die Relationen (1):

$$\frac{pa}{pb'} = \frac{pb}{pa'}, = \frac{pa - pb}{pb' - pa'} = -\frac{ba}{b'a'}, \quad \frac{pa}{pb} = \frac{pb'}{pa'} = -\frac{b'a}{ba'},$$

folglich:

$$\frac{ba}{ba'} = \frac{\overline{pa}^2}{k} \cdot \frac{b'a'}{b'a}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\frac{ca}{ca'} = \frac{\overline{pa}^2}{k} \cdot \frac{c'a'}{c'a},$$

und mithin:

$$\frac{ba}{ba'} : \frac{ca}{ca'} = \frac{b'a'}{b'a} : \frac{c'a'}{c'a}. \qquad (2)$$

Umgekehrt, wenn 6 Punkte die Eigenschaft haben, daß das anharmonische Verhältniß von 4 derselben dem anharmonischen Verhältnisse der 4 conjugirten Punkte gleich ist; so bilden diese 6 Punkte eine Involution. — Denn es seien a,a'; b,b'; c,c' sechs Punkte, welche der Gleichung (2) genügen, und man bestimme p so, daß:

$$pa \cdot pa' = pb \cdot pb' = k,$$

und c'' so, daß:

$$pc \cdot pc'' = k$$

ist; so bilden die 6 Punkte a,a'; b,b'; c,c'' nach dem direkten Satze eine Involution und genügen der Gleichung:

$$\frac{ba}{ba'} : \frac{ca}{ca'} = \frac{b'a'}{b'a} : \frac{c''a'}{c''a}. \qquad (3)$$

Aus der Vergleichung von (2) und (3) folgt:

$$\frac{c''a'}{c''a} = \frac{c'a'}{c'a} = \frac{c''a' - c'a'}{c''a - c'a} = \frac{c'c''}{c'c''},$$

und es muß folglich $c'c'' = o$ sein, so daß die Punkte c' und c'' zusammenfallen.

Wenn man irgend einen äußern Punkt O mit den sechs Involutionspunkten verbindet, so erhält man ein Involutionsbüschel von sechs Geraden, d. h. das anharmonische Verhältniß von vier derselben ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der vier conjugirten — und eine beliebige durch das Büschel gehende Sekante wird in sechs Punkten geschnitten, welche eine Involution bilden.

Wenn drei, durch dieselben zwei Punkte gehende Kreise von einer beliebigen Sekante geschnitten werden, so bilden die sechs Durchschnittspunkte eine Involution, und der Mittelpunkt der Involution ist der Durchschnittspunkt der Sekante mit der durch die beiden gemeinschaftlichen Punkte gehenden Geraden.

Wenn vier, paarweise conjugirte Punkte a, a'; b, b' gegeben sind, so kann man die doppelten Involutionspunkte von fünf Punkten, worunter sich a, a'; b, b' befinden, durch folgende Construktion bestimmen: Soll die Auflösung bei lauter reellen Punkten möglich sein, so muß entweder die eine der Geraden aa' und bb'

die andere enthalten, oder sie müssen außerhalb einander liegen. 1) Wenn bb' in aa' enthalten ist, so lege man durch die Punkte a,a' einen Kreis, und es sei s der Durchschnittspunkt der Tangenten in a und a'. Alsdann ziehe man die Geraden sb, sb' und verbinde die Durchschnittspunkte paarweise, so schneiden sich die so erhaltenen Geraden in den gesuchten doppelten Involutionspunkten c, c', welche auf der Geraden abb'a' liegen, und zugleich harmonisch conjugirt zu a,a'; b,b' sind. — 2) Wenn bb' außerhalb aa' liegt, so ziehe man durch einen Punkt o der Ebene die Geraden oa, oa', ob, ob', und alsdann liegen ob und ob' resp. in oa und der Verlängerung von oa'. Durchschneidet man nun diese vier Geraden mit einer beliebigen Sekante, nimmt dann mit den Durchschnittspunkten die vorhergehende Construction vor und projicirt die erhaltenen Punkte durch Gerade, welche vom Punkte o ausgehen, auf aa'bb'; so erhält man die verlangten Punkte.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Homographie oder Collineationsverwandtschaft.

§. 163.

Wenn eine ebene Figur S gegeben ist, und man setzt für jeden Punkt M oder (x, y) derselben einen Punkt M' oder (x', y'), welcher durch die Formeln:

$$x = \frac{ax' + by' + c}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}, \quad y = \frac{dx' + ey' + f}{\alpha x' + \beta y' + \gamma} \qquad (1)$$

bestimmt wird; so erhält man eine neue Figur S', welche die homographische oder collineare der ersten genannt wird. Substituirt man die Werthe (1) in die Gleichung der Figur S, so erhält man die Gleichung der homographischen Figur S'. — Hieraus folgt: wenn der Punkt M eine Gerade beschreibt, so beschreibt der correspondirende Punkt M' auch eine Gerade — und allgemein: wenn der Punkt M eine Curve des mten Grades beschreibt, so beschreibt der Punkt M' eine Curve desselben Grades. — Den Punkten und Geraden der Figur S entsprechen Punkte und Gerade in der homographischen Figur S'; einer Tangente in S ent-

ſpricht eine Tangente in S'; drei in gerader Linie liegenden Punkten in S entſprechen drei in gerader Linie liegende Punkte in S'; drei durch denſelben Punkt gehenden Geraden in S entſprechen drei durch denſelben Punkt gehende Gerade in S'; ꝛc. ꝛc.

Wenn man die Formeln (1) für x' und y' auflöſ't, ſo erhält man Werthe von derſelben Form; folglich iſt auch S die homographiſche Figur von S'.

Soll einer Geraden immer eine Gerade entſprechen, ſo müſſen die Relationen (1) nothwendig die obige Form haben.

Die Punkte der zweiten Figur, welche den in unendlicher Entfernung liegenden Punkten der erſten entſprechen, liegen alle *auf* derſelben Geraden I', deren Gleichung iſt:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0,$$

ſo daß die parallelen Geraden in der erſten Figur entſprechenden Geraden der zweiten ſich in einem Punkte von I' ſchneiden.

Wenn man die zweite Figur auf neue Coordinatenaxen bezieht, ſo behalten die Formeln (1) dieſelbe Form, weil die urſprünglichen Coordinaten x', y' des Punktes M lineare Funktionen der neuen Coordinaten ξ, η deſſelben Punktes ſind. Nun kann man aber die neuen Axen ſo wählen, daß ſich die Brüche (1) vereinfachen. Nimmt man z. B. die den urſprünglichen Axen entſprechenden Geraden zu den neuen Coordinatenaxen, ſo reduciren ſich die Formeln (1) auf:

$$x = \frac{a\xi}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}, \quad y = \frac{b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}. \qquad (2)$$

4) Das anharmoniſche Verhältniß vier in gerader Linie liegender Punkte iſt gleich dem anharmoniſchen Verhältniſſe der vier correſpondirenden Punkte.

Denn nimmt man die durch die vier gegebenen Punkte gehende Gerade zur Axe der x und die correſpondirende Gerade zur Axe der ξ, nennt die Abſciſſen der vier gegebenen Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 und die der vier correſpondirenden Punkte ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4; ſo hat man:

$$x_1 = \frac{a\xi_1}{\alpha\xi_1 + \gamma}, \quad x_2 = \frac{a\xi_2}{\alpha\xi_2 + \gamma}, \ldots$$

$$x_1 - x_3 = \frac{a\gamma(\xi_1 - \xi_3)}{(\alpha\xi_1 + \gamma)(\alpha\xi_3 + \gamma)} = a^3\gamma \cdot \frac{\xi_1 \xi_3}{x_1 x_3}(\xi_1 - \xi_3),$$

$$x_1 - x_4 = a^3\gamma \cdot \frac{\xi_1 \xi_4}{x_1 x_4}(\xi_1 - \xi_4),$$

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_4} = \frac{\xi_3}{\xi_4} \cdot \frac{x_4}{x_3} \cdot \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_4},$$

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_4} : \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_4}, \text{ w. z. b. w.}$$

Aus dem vorhergehenden Satze folgt:

1) Das anharmonische Verhältniß von vier durch denselben Punkt gehenden Geraden ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der vier entsprechenden Geraden.

2) Sechs Punkten, welche eine Involution bilden, entsprechen sechs Punkte, die ebenfalls eine Involution bilden, und einem Büschel von sechs Geraden, die eine Involution bilden, entspricht ein Büschel von sechs Geraden, die auch eine Involution bilden.

§. 164.

Nutzen der Homographie.

Die Eigenschaften der Figuren lassen sich in beschreibende und messende (descriptive und metrische) unterscheiden. Bei den ersten betrachtet man die Durchschnittspunkte der die Figur bildenden Geraden, ohne deren Längen in Betracht zu ziehen, wogegen eine metrische Eigenschaft eine Relation zwischen diesen Längen ist. — Ferner heißt eine Eigenschaft projectivisch, wenn sie in der homographischen Figur stattfindet. — Die descriptiven Eigenschaften sind offenbar projectivisch; aber die metrischen Relationen sind es nicht immer. — Da das anharmonische Verhältniß in der homographischen Figur denselben Werth behält, so findet jede Gleichung zwischen einer gewissen Anzahl solcher Verhältnisse in der ersten Figur auch in der zweiten statt, d. h. diese Gleichung ist projectivisch. So z. B. sind die harmonische Proportion und die Involution projectivisch.

Die Homographie ist eine sehr fruchtbare geometrische Methode; denn ist eine projectivische Eigenschaft in einem besondern Falle der Figur erkannt, so kann man sie verallgemeinern und vermittelst der acht in den Formeln (1) vorkommenden willkürlichen Constanten die besondern Eigenthümlichkeiten der Figur in ihrer ersten Lage ganz, oder zum Theil entfernen. Eine besondere Curve

des zweiten Grades, z. B. der Kreis, gibt durch Homographie alle Curven des zweiten Grades, und eine beim Kreiſe beobachtete projectiviſche Eigenſchaft findet folglich bei allen Curven des zweiten Grades ſtatt.

Beiſpiel 1. Wir wollen uns zwei feſte Parallelen A, B und zwei bewegliche Sekanten C, D denken, welche zu einer gegebenen Richtung parallel ſind. Die Sekante C ſchneide die Geraden A, B in a, b und die Sekante D in c, d, und wir wollen ac, bd ziehen, welche ſich in m ſchneiden; ſo erhellet unmittelbar: daß der Ort der Punkte m eine Gerade H iſt, welche zu A, B parallel und gleich weit von dieſen beiden Geraden entfernt iſt. — Die Homographie transformirt die beiden Parallelen A, B in zwei Gerade A′, B′, welche ſich in o′ auf der Axe I′ des Unendlichen ſchneiden; ferner die beiden beweglichen Sekanten C, D in zwei bewegliche Sekanten C′, D′, welche durch den Punkt i′ von I′ gehen, und endlich den Ort H in eine durch o′ gehende Gerade H′. — Man erhält alſo den Satz in §. 34 wieder.

Es ſei h der Punkt, wo die bewegliche Sekante den Ort ſchneidet; ſo iſt:

$$\frac{h'a'}{h'b'} : \frac{i'a'}{i'b'} = \frac{ha}{hb} : \frac{ia}{ib},$$

der Punkt i liegt in unendlicher Entfernung; alſo iſt $\frac{ia}{ib} = 1$ und $ha = -hb$; folglich:

$$\frac{h'a'}{h'b'} : \frac{i'a'}{i'b'} = -1.$$

Die vier Geraden A′, B′, I′, H′ bilden alſo ein harmoniſches Büſchel.

Beiſpiel 2. Bekanntlich ſind die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmeſſers des Kreiſes parallel. In der homographiſchen Figur wird der Durchmeſſer eine bewegliche Sekante a′o′b′, welche durch einen feſten Punkt o′ geht, und die Tangenten in a′, b′ ſchneiden ſich auf der Axe I′ des Unendlichen, welches die Fundamentaleigenſchaft der Polaren iſt.

Bezeichnet d′ den Punkt, wo die Sekante die Polare ſchneidet, ſo iſt:

$$\frac{o'a'}{o'b'} : \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{oa}{ob} : \frac{da}{db} = -1;$$

d. h. jede durch den Pol gehende Gerade wird durch

eine Curve des zweiten Grades und die Polare harmoniſch getheilt.

Es bietet ſich hier eine erſte Anwendung der in §§. 33 folgg. erörterten Principien dar. Wenn die in den Formeln (1) vorkommenden Conſtanten alle reell ſind, ſo entſpricht einem reellen Punkte ein reeller und einem imaginären Punkte ein imaginärer Punkt. Ein reeller Kreis transformirt ſich in eine reelle Curve des zweiten Grades, und ein innerhalb des Kreiſes liegender Punkt o, z. B. der Mittelpunkt, hat einen nothwendig innerhalb der Curve des zweiten Grades liegenden Punkt o' zum homographiſchen. Denn da eine beliebige durch o gehende Gerade den Kreis ſchneidet, ſo ſchneidet auch eine beliebige durch o' gehende Gerade die Curve des zweiten Grades — und da der Kreis keinen in unendlicher Entfernung liegenden Punkt hat; ſo liegt auch kein Punkt der Curve des zweiten Grades auf der Geraden I'; d. h. dieſe Gerade liegt außerhalb der Curve.

Wenn man nur reelle Größen betrachtet, ſo erhält man die Eigenſchaften der Polaren nur für den Fall, wo die Polare außerhalb der Curve liegt; allein dieſe Einſchränkung iſt nicht nothwendig, und ſogar unnütz, ſo daß die bisher angewandte Methode mangelhaft iſt, und verallgemeinert werden muß. — Die zum Grunde gelegte Eigenſchaft der Tangenten in den Endpunkten des Durchmeſſers eines Kreiſes findet allgemein ſtatt, die Durchmeſſer und Tangenten mögen reell, oder imaginär ſein — und ebenſo können die in den Formeln (1) vorkommenden Conſtanten reell, oder imaginär ſein, und man erhält doch eine Curve des zweiten Grades S' und eine Gerade I'. — Nun kann man aber die acht Conſtanten ſo annehmen, daß die Curve des zweiten Grades einer gegebenen Curve deſſelben Grades und die Gerade I' einer Geraden gleich wird, welche in der Ebene der Curve eine beliebige Lage hat. Auf dieſe Weiſe erhält man zwiſchen den Conſtanten ſieben Relationen, welchen immer genügt werden kann, weil die Conſtanten nicht reell zu ſein brauchen.

Transformirt man z. B. den Kreis:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

vermittelſt der Formeln:

$$x = \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}}x' + (y' - 1)}{\sqrt{3}\,y'},\quad y = \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}}\,x' - (y' - 1)}{\sqrt{3}\,y'},$$

ſo erhält man den neuen reellen Kreis:

$$x'^2 + (y' + 2)^2 - 6 = 0.$$

Der Punkt o' oder (o, 1) liegt außerhalb, und ſeine Polare $y = o$ oder die Axe der x ſchneidet den Kreis in zwei reellen Punkten. Die reelle Peripherie von S' entſpricht imaginären Punkten von S. Die beiden reellen Punkte, worin S' von I' geſchnitten wird, entſprechen zwei imaginären Punkten von S, welche auf einer unendlich entfernten Geraden liegen. — Die reellen Sekanten, welche man durch o' ziehen kann, entſprechen gewiſſen durch o gehenden imaginären Durchmeſſern, und man ſieht hieraus: weshalb es nöthig war, zuvor der urſprünglichen Eigenſchaft ihre ſymboliſche Bedeutung zu geben.

§. 165.

Conjugirte Gerade.

Von den vier Durchſchnittspunkten zweier homothetiſcher Curven des zweiten Grades liegen zwei in unendlicher Entfernung. Durch Homographie werden dieſe beiden Curven in zwei andere verwandelt, welche ſich in vier Punkten ſchneiden, weil die früher in unendlicher Entfernung liegenden Punkte auf die Gerade I' zurückgeführt werden.

Wenn zwei homothetiſche Curven des zweiten Grades concentriſch ſind, ſo liegen ihre vier Durchſchnittspunkte in unendlicher Entfernung, und zwar auf derſelben Geraden I'; d. h. die beiden Curven haben nach dieſer Geraden eine doppelte Berührung. — So geben z. B. zwei concentriſche Kreiſe zwei Curven des zweiten Grades mit doppelter Berührung.

Zieht man in einem Kreiſe zwei aufeinander ſenkrechte Durchmeſſer aob, cod, ſo liegt der Pol eines jeden dieſer Durchmeſſer auf dem andern in unendlicher Entfernung. Durch Homographie erhält man eine Curve des zweiten Grades und zwei durch den Punkt o' gehende Gerade von ſolcher Beſchaffenheit: daß der Pol einer jeden auf der andern, und zwar in dem Punkte, wo ſie von der Polare I' des Punktes o' geſchnitten wird, liegt, aus welchem Grunde dieſe beiden Geraden conjugirte Gerade des Punktes o' heißen.

Der Punkt o' hat unendlich viele Paare conjugirter Geraden, weil man eine nach Belieben annehmen kann. Da nun im Kreiſe die Sehne ab eine conſtante Länge hat, ſo umhüllt ſie einen

concentriſchen Kreis, während ihr Pol einen andern concentriſchen Kreis beſchreibt. Man hat folglich den Lehrſatz:

5) Wenn man durch einen in der Ebene einer Curve des zweiten Grades willkürlich genommenen feſten Punkt verſchiedene Paare conjugirter Geraden zieht und die Punkte, worin jedes Paar die Curve ſchneidet, verbindet; ſo umhüllen dieſe vier Sehnen eine zweite Curve des zweiten Grades, während ihre Pole eine dritte Curve des zweiten Grades beſchreiben — und außerdem hat jede der neuen Curven mit der gegebenen eine doppelte Berührung nach der Polare des feſten Punktes.

Wenn der Punkt o' der Mittelpunkt der Curve des zweiten Grades iſt, ſo wird jedes Paar conjugirter Geraden ein Syſtem conjugirter Durchmeſſer. Hieraus folgt:

Die Seiten der in eine Curve des zweiten Grades beſchriebenen Parallelogramme umhüllen eine zweite ſolche Curve, und die Ecken der umſchriebenen Parallelogramme beſchreiben eine dritte Curve des zweiten Grades. — Da ferner die Polare des Mittelpunktes in unendlicher Entfernung liegt, ſo ſind die beiden neuen Curven zu der gegebenen homothetiſch und concentriſch.

§. 166.

Nach dem Frühern (§. 162) beſtimmen drei durch zwei gegebene Punkte gehende Kreiſe auf einer beliebigen Sekante ſechs Punkte, welche eine Involution bilden. Da nun dieſe drei Kreiſe durch Homographie drei Curven des zweiten Grades geben, welche vier gemeinſchaftliche Punkte haben; ſo hat man den Satz:

6) Drei Curven des zweiten Grades, welche vier gemeinſchaftliche Punkte haben, beſtimmen auf einer beliebigen Sekante ſechs Punkte, welche eine Involution bilden — und die derſelben Curve angehörigen Punkte ſind conjugirt.

Eine beliebige Sekante ſchneidet eine Curve des zweiten Grades und die Gegenſeiten des ein geſchriebenen Viereckes in ſechs Punkten, welche eine Involution bilden, weil ein Paar gerader Linien als eine Curve des zweiten Grades angeſehen werden kann.

Hieraus ergibt ſich der Satz in §. 149a und auch das Mittel:

die Punkte zu construiren, worin eine Sekante eine durch fünf gegebene Punkte gehende Curve des zweiten Grades schneidet.

§. 167.

Rotirende Vielecke.

Es seien a, b, c, d vier auf einem Kreisumfange liegende feste Punkte und o ein beweglicher Punkt auf demselben Kreisumfange, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Geraden oa, ob, oc, od constant, weil sich die Winkel, welche diese Geraden unter sich bilden, nicht ändern. Nimmt man auf oa einen nicht auf der Kreislinie liegenden Punkt p, so gibt das Büschel pa, pb, pc, pd nicht dasselbe anharmonische Verhältniß, wie das erste; denn von den vier Punkten, worin die Sekante bc jedes der beiden Büschel schneidet, sind drei gemeinschaftlich und einer verschieden. Da der Kreis durch Homographie in eine Curve des zweiten Grades transformirt wird, so folgt hieraus der Satz:

7) Wenn vier Punkte in einer Ebene gegeben sind, so ist der Ort der Punkte von solcher Beschaffenheit: daß das Büschel der von jedem dieser Punkte nach den vier festen Punkten gehenden Geraden ein constantes anharmonisches Verhältniß darbietet, eine durch die vier festen Punkte gehende Curve des zweiten Grades.

In jedem Büschel, welches einen der festen Punkte, z. B. a, zur Spitze hat, kennt man drei Gerade ab, ac, ad und die vierte berührt die Curve des zweiten Grades in a. — Gibt man dem anharmonischen Verhältnisse verschiedene Werthe, so erhält man lauter Curven des zweiten Grades, welche durch die vier gegebenen Punkte gehen.

Aus dem Gesagten ergeben sich mehrere bemerkenswerthe Sätze:

8) Wenn A, B, C, . . . mehrere von dem Punkte o ausgehende und A′, B′, C′, . . . ebensoviele von dem Punkte o′ ausgehende Gerade von solcher Beschaffenheit sind: daß irgend vier Gerade des ersten Systemes dasselbe anharmonische Verhältniß darbieten, wie die vier entsprechenden Geraden in dem zweiten Systeme; so liegen die Durchschnittspunkte a, b, c, . . . der Geraden A und A′, B und B′, C und C′, . . .

auf derſelben durch o und o′ gehenden Curve des zweiten Grades.

Conſtruirt man nämlich die durch o, o′, a, b, c gehende Curve des zweiten Grades, ſo liegt auch der Punkt d auf derſelben. Denn es ſei δ der Punkt, worin D dieſe Curve ſchneidet, ſo bilden A′, B′, C′, o′δ ein harmoniſches Syſtem, welches gleich A, B, C, D iſt; folglich fällt o′δ mit D′ und d mit δ zuſammen.

Wenn man mit verſchiedenen Punkten a, a′, a″, . . . einer Geraden X zwei außerhalb derſelben liegende Punkte o, p verbindet; ſo haben die ſo erhaltenen beiden Strahlenbüſchel die vorhergehende Eigenſchaft, und zwar noch, wenn ſich das erſte Büſchel um o durch irgend einen Winkel α und das zweite um p durch einen beliebigen Winkel β drehet, ſo daß die Durchſchnittspunkte der entſprechenden Geraden auf derſelben Curve des zweiten Grades liegen. — Da nun jede Gerade des erſten Büſchels mit ihrer urſprünglichen Lage den conſtanten Winkel α und jede Gerade des zweiten Büſchels den conſtanten Winkel β bildet; ſo hat man den Satz:

9) Wenn ſich zwei Winkel von conſtanter Größe um ihre feſten Spitzen o, p drehen und der Durchſchnittspunkt zweier ihrer Schenkel auf einer Geraden X fortrückt; ſo beſchreibt der Durchſchnittspunkt der beiden andern Schenkel eine durch o und p gehende Curve des zweiten Grades.

Es ſeien $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n$, n feſte Punkte, $X_1, X_2, X_3, \ldots X_{n-1}$, n—1 feſte Gerade, und $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, n bewegliche Gerade, welche ſich um die feſten Punkte $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n$ drehen, ſo daß die n—1 Winkelſpitzen $(A_1, A_2), (A_2, A_3), \ldots (A_{n-1}, A_n)$ auf $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ fortrücken; man ſoll den von dem freien Scheitel (A_n, A) beſchriebenen Ort finden.

Wenn man das Syſtem der beweglichen Geraden in mehrern Lagen betrachtet, ſo ſind die ſich auf X_x ſchneidenden Büſchel o_1, o_2 harmoniſch äquivalent. Ebenſo ſind die Büſchel o_2, o_3; o_3, o_4; $\ldots o_{n-1}, o_n$, und folglich die Büſchel o_1, o_n harmoniſch äquivalent, und die Durchſchnittspunkte dieſer beiden letzten Büſchel liegen auf einer durch o_1 und o_n gehenden Curve des zweiten Grades. — Man hat alſo den Satz:

10) Wenn ſich die n Seiten eines Vieleckes um n feſte Punkte drehen, während n—1 Winkelſpitzen

drehen; so umhüllt die nte Seite des Vieleckes eine Curve des zweiten Grades, welche mit der ersten eine doppelte Berührung hat.

§. 169.

Es sei abc (Fig. 182) ein in eine Curve des zweiten Grades beschriebenes Dreieck, dessen zwei Seiten ab, ac resp. auf zwei Curven P, N fortrollen, so umhüllt die dritte Seite eine gewisse Curve M. Betrachtet man zwei Lagen abc, a'b'c' des Dreieckes, für welche die Berührungspunkte resp. m, n, p und m', n', p' sind; so liegen die Durchschnittspunkte p_1, n_1, m'_1 der Gegenseiten des eingeschriebenen Sechseckes acb'a'c'b in derselben Geraden. Nähert sich nun die Lage a'b'c' der Lage abc, so nähern sich die Punkte m_1, n_1, p_1 den Berührungspunkten m, n, p und der Punkt m'_1 nähert sich dem Punkte m_2, welcher in Bezug auf b und c der harmonisch conjugirte von m_1 ist, und da p, n, m_2 in gerader Linie liegen; so folgt: daß sich die drei Geraden am, bn, cp in demselben Punkte schneiden (§. 37). Man hat also folgenden Lehrsatz:

15) Wenn die Seiten eines in eine Curve des zweiten Grades beschriebenen Dreieckes auf drei Curven fortrollen, und in jeder Lage des beweglichen Dreieckes die Winkelspitzen desselben mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbunden werden, so erhält man drei Gerade, welche durch denselben Punkt gehen.

Man kann für eine der Curven N, P, oder für beide, feste Punkte setzen, und vermittelst der Lehrsätze 12, 13 und 14 leicht den Berührungspunkt für jede Lage der beweglichen Seite bestimmen.

§. 170.

Wir wollen drei Kreise betrachten, welche eine reelle, oder imaginäre gemeinschaftliche Sekante haben, und wovon in den einen ein Dreieck abc beschrieben ist, dessen zwei Seiten ab, ac auf den beiden andern Kreisen fortrollen. Es seien p, n, m die Berührungspunkte auf den Kreisen und auf der von der dritten Seite des Dreieckes umhüllten Curve. Da die drei Geraden am, bn, cp durch denselben Punkt gehen und der Punkt m', welcher in Beziehung auf b und c der harmonisch conjugirte von m ist und mit n', p' in

gerader Linie liegt; so liegen die Mitten von mm', nn', pp' auch in gerader Linie (§. 38). Die Mitte n'' von nn' wird aber bestimmt durch die Bedingung:

$$\overline{n''n}^2 = n''a \cdot n''c,$$

und folglich ist diese Mitte der Punkt, wo die gemeinschaftliche Sekante D die Seite ac trifft.

Da ferner die durch die Mitten gehende Gerade zwei Punkte auf der gemeinschaftlichen Sekante D hat, so fällt sie mit dieser zusammen, und man hat:

$$\overline{m''m}^2 = m''b \cdot m''c.$$

Denken wir uns nun durch die gemeinschaftlichen Punkte der beiden ersten Kreise und durch den Punkt m einen dritten Kreis gelegt, so berührt derselbe die Gerade m'm im Punkte m, und folglich auch die Umhüllungscurve, welche also eine Reihe durch dieselben beiden Punkte gehender Kreise berühren muß, was nur möglich ist, wenn sich diese Kreise auf einen einzigen reduciren, welcher alsdann die Umhüllungscurve ist. — Die freie Seite bc des beweglichen Dreieckes umhüllt also einen Kreis, welcher mit allen übrigen Kreisen dieselbe gemeinschaftliche Sekante hat.

Dieser Satz erstreckt sich offenbar auch auf den Fall, wo an die Stelle des Dreieckes ein beliebiges Vieleck tritt, dessen Seiten, eine ausgenommen, auf Kreisen fortrollen, die unter sich und mit dem Kreise, in welchen das Vieleck beschrieben ist, eine gemeinschaftliche Sekante haben. Uebrigens können auch mehrere Seiten des Vieleckes auf demselben Kreise fortrollen.

Wenn mehrere Curven des zweiten Grades dieselben gemeinschaftlichen Sekanten haben, und man transformirt sie durch Homographie, so daß eine der gemeinschaftlichen Sekanten in eine unendliche Entfernung gerückt wird; so erhält man homothetische Curven, und wenn eine derselben ein Kreis ist; so sind die übrigen auch Kreise. Man hat also den Satz:

16) Wenn ein Vieleck in eine Curve des zweiten Grades beschrieben ist, und alle Seiten desselben, eine ausgenommen, rollen auf andern Curven des zweiten Grades fort, welche unter sich und mit der ersten dieselben gemeinschaftlichen Sekanten haben; so umhüllt die freie Seite eben-

falls eine Curve des zweiten Grades, welche durch die vier gemeinſchaftlichen Punkte der übrigen geht.

Vierundzwanzigſtes Kapitel.

Homologie.

§. 171.

Wir haben bisher die in den Formeln (1) vorkommenden *acht* Conſtanten ganz willkürlich gelaſſen; aber wenn man gewiſſe Beziehungen zwiſchen ihnen aufſtellt, oder ihre Anzahl verkleinert, ſo wird die Art der Formveränderung particulariſirt. So iſt z. B. die Aehnlichkeit nichts als eine beſondere Art der Homographie.

Geben wir den Formeln (1) die Form:

$$x - x_0 = \frac{x' - x'_0}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}, \quad y - y_0 = \frac{y' - y'_0}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}, \qquad (3)$$

ſo iſt der Punkt o oder (x_0, y_0) ſein eigener correſpondirender Punkt, und jeder Punkt der Geraden A oder:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$$

iſt ebenfalls ſein correſpondirender ſelbſt. Die den Formeln (3) entſprechende beſondere Art von Homographie wird Homologie genannt; die Gerade A iſt die Axe der Homologie und der Punkt o der Mittelpunkt der Homologie.

Aus der Relation:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{x' - x_0}$$

erhellet: daß zwei homologiſche Punkte auf demſelben vom Mittelpunkte ausgehenden Radius liegen. — Zwei homologiſche Gerade ſchneiden ſich in einem auf der Axe liegenden Punkte. — Die dem Unendlichen entſprechende Gerade I′ iſt zu der Axe parallel und um die Länge $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ davon entfernt.

Wenn d, i′ die Punkte ſind, wo der Radius oaa′ reſp. die Axe und die Gerade I′ trifft; ſo iſt:

$$\frac{i'd}{i'o} : \frac{a'd}{a'o} = \frac{id}{io} : \frac{ad}{ao} = \frac{ao}{ad},$$

woraus folgt:

$$\frac{ao}{a'o} = \frac{i'd}{i'o} \cdot \frac{ad}{a'd} = k \cdot \frac{ad}{a'd}.$$

18) Das Verhältniß der Entfernungen zweier homologiſcher Punkte vom Mittelpunkte iſt alſo dem Verhältniſſe der Abſtände dieſer Punkte von der Axe proportional.

Ferner iſt:

$$\frac{i'a'}{i'd} : \frac{oa'}{od} = \frac{ia}{id} : \frac{oa}{od} = \frac{od}{oa},$$

und wenn man aus dem Punkte a′ ein Perpendikel p′ auf I′ fällt; ſo iſt:

$$\frac{a'o'}{p'} = m \cdot oa.$$

19) D. h. das Verhältniß der Entfernungen eines Punktes der zweiten Figur vom Mittelpunkte und von der Geraden I′ iſt dem Abſtande des correſpondirenden Punktes der erſten Figur vom Mittelpunkte proportional.

§. 172.

Conſtruction einer homologiſchen Figur.

Wenn ein Syſtem von Punkten a, b, c, ... gegeben iſt und o zum Mittelpunkte der Homologie genommen wird, ſo wird das homologiſche Syſtem auf folgende Weiſe conſtruirt: Zunächſt kann man auf oa, ob, oc drei beliebige Punkte a′, b′, c′ als homologiſche von a, b, c annehmen, ſo beſtimmen die Durchſchnitte der homologiſchen Geraden ab und a′b′, ſo wie ac und a′c′ zwei Punkte der Axe A. Iſt die Axe bekannt, ſo conſtruirt man die homologiſchen Punkte von d, e, . . . Die Gerade da trifft die Axe in α; der Durchſchnitt von αa′ und od gibt den homologiſchen Punkt d′ von d; u. ſ. f.

Wenn ſtatt des Mittelpunktes die Axe gegeben iſt, ſo nimmt man a′ beliebig in der Ebene an, alsdann trifft ab die Axe in α, und wenn man b′ beliebig auf αa′ annimmt; ſo wird der Mittel-

falls eine Curve des zweiten Grades, welche durch die vier gemeinſchaftlichen Punkte der übrigen geht.

Vierundzwanzigſtes Kapitel.

Homologie.

§. 171.

Wir haben bisher die in den Formeln (1) vorkommenden acht Conſtanten ganz willkürlich gelaſſen; aber wenn man gewiſſe Beziehungen zwiſchen ihnen aufſtellt, oder ihre Anzahl verkleinert, ſo wird die Art der Formveränderung particulariſirt. So iſt z. B. die Aehnlichkeit nichts als eine beſondere Art der Homographie.

Geben wir den Formeln (1) die Form:

$$x - x_0 = \frac{x' - x'_0}{\alpha x' + \beta y' + \gamma'}, \quad y - y_0 = \frac{y' - y_{,0}}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}, \qquad (3)$$

ſo iſt der Punkt o oder (x_0, y_0) ſein eigener correſpondirender Punkt, und jeder Punkt der Geraden A oder:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$$

iſt ebenfalls ſein correſpondirender ſelbſt. Die den Formeln (3) entſprechende beſondere Art von Homographie wird Homologie genannt; die Gerade A iſt die Axe der Homologie und der Punkt o der Mittelpunkt der Homologie.

Aus der Relation:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{x' - x_0}$$

erhellet: daß zwei homologiſche Punkte auf demſelben vom Mittelpunkte ausgehenden Radius liegen. — Zwei homologiſche Gerade ſchneiden ſich in einem auf der Axe liegenden Punkte. — Die dem Unendlichen entſprechende Gerade I' iſt zu der Axe parallel und um die Länge $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ davon entfernt.

Wenn d, i' die Punkte ſind, wo der Radius oaa' reſp. die Axe und die Gerade I' trifft; ſo iſt:

$$\frac{i'd}{i'o} : \frac{a'd}{a'o} = \frac{id}{io} : \frac{ad}{ao} = \frac{ao}{ad},$$

woraus folgt:

$$\frac{ao}{a'o} = \frac{i'd}{i'o} \cdot \frac{ad}{a'd} = k \cdot \frac{ad}{a'd}.$$

18) Das Verhältniß der Entfernungen zweier homologiſcher Punkte vom Mittelpunkte iſt alſo dem Verhältniſſe der Abſtände dieſer Punkte von der Axe proportional.

Ferner iſt:

$$\frac{i'a'}{i'd} : \frac{oa'}{od} = \frac{ia}{id} : \frac{oa}{od} = \frac{od}{oa},$$

und wenn man aus dem Punkte a' ein Perpendikel p' auf I' fällt; ſo iſt:

$$\frac{a'o'}{p'} = m \cdot oa.$$

19) D. h. das Verhältniß der Entfernungen eines Punktes der zweiten Figur vom Mittelpunkte und von der Geraden I' iſt dem Abſtande des correſpondirenden Punktes der erſten Figur vom Mittelpunkte proportional.

§. 172.

Conſtruction einer homologiſchen Figur.

Wenn ein Syſtem von Punkten a, b, c, ... gegeben iſt und o zum Mittelpunkte der Homologie genommen wird, ſo wird das homologiſche Syſtem auf folgende Weiſe conſtruirt: Zunächſt kann man auf oa, ob, oc drei beliebige Punkte a', b', c' als homologiſche von a, b, c annehmen, ſo beſtimmen die Durchſchnitte der homologiſchen Geraden ab und a'b', ſo wie ac und a'c' zwei Punkte der Axe A. Iſt die Axe bekannt, ſo conſtruirt man die homologiſchen Punkte von d, e, . . . Die Gerade da trifft die Axe in α; der Durchſchnitt von αa' und od gibt den homologiſchen Punkt d' von d; u. ſ. f.

Wenn ſtatt des Mittelpunktes die Axe gegeben iſt, ſo nimmt man a' beliebig in der Ebene an, alsdann trifft ab die Axe in α, und wenn man b' beliebig auf αa' annimmt; ſo wird der Mittel-

punkt o durch den Durchſchnitt von aa′ und bb′ beſtimmt. — Man kann alſo a′, b′ willkürlich in der Ebene annehmen, worauf man c′ beliebig auf ac annimmt, ſo daß man im Ganzen 5 willkürliche Größen hat, und in der That enthalten die Formeln (3) fünf willkürliche Conſtanten.

19) Wenn zwei Dreiecke in der Ebene eine ſolche Lage haben, daß ſich die drei Verbindungslinien je zweier correſpondirender Ecken in demſelben Punkte ſchneiden; ſo liegen die drei Durchſchnittspunkte von je zwei correſpondirenden Seiten in gerader Linie.

Denn zwei ſolche Dreiecke ſind homologiſch, und der umgekehrte Satz findet ebenfalls ſtatt.

§. 173.

Homologie zweier Curven des zweiten Grades.

Da die Formeln (3) fünf willkürliche Parameter enthalten, ſo gibt eine ſpecielle Curve des zweiten Grades durch Homologie alle Curven des zweiten Grades; d. h. zwei beliebige, in derſelben Ebene liegende Curven des zweiten Grades ſind homologiſch, und wir wollen dieſen Gegenſtand nun näher unterſuchen.

Wenn man aus dem Mittelpunkte der Homologie an die Curve S des zweiten Grades eine reelle, oder imaginäre Tangente zieht, ſo berührt ſie auch die homologiſche Curve S′ in dem homologiſchen Punkte. Der Mittelpunkt der Homologie kann alſo kein anderer ſein, als der Durchſchnittspunkt zweier gemeinſchaftlicher Tangenten. — Die Gleichung der zwei Gerade berührenden Curven des zweiten Grades, wenn der Durchſchnittspunkt der Geraden als Anfangspunkt dient, iſt:

$$ax^2 + bxy + cy^2 - \lambda(px + qy + 1)^2 = o,$$

wo $ax^2+bxy+cy^2=o$ die beiden Tangenten, und $px+qy+1=o$ die Polare des Anfangspunktes ausdrückt. — In dieſer Gleichung ſind a, b, c Conſtanten und λ, p, q willkürliche Parameter. — Die Gleichungen der beiden Curven S und S′ ſind folglich:

$$ax^2 + bxy + cy^2 - \lambda(px + qy + 1)^2 = o, \quad (4)$$

$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2 - \lambda'(p'x' + q'y' + 1)^2 = o. \quad (5)$$

Setzt man für x und y die Ausdrücke:

$$x = \frac{x'}{\alpha x' + \beta y' + \gamma} \text{ und } y = \frac{y'}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}$$

in (4), ſo muß ſich, wenn der Anfangspunkt wirklich der Mittelpunkt der Homologie iſt, die Gleichung (5) mit

$$ax'^2+bx'y'+cy'^2-\lambda\gamma^2\left(\frac{p+\alpha}{\gamma}x'+\frac{q+\beta}{\gamma}y'+1\right)^2=0$$

identificiren laſſen, ſo daß man ſetzen kann:

$$\gamma=\pm\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}},\ \alpha=p'\gamma-p,\ \beta=q'\gamma-q.$$

Es iſt alſo jeder der 6 Eckpunkte des um zwei Curven des zweiten Grades beſchriebenen Viereckes ein Mittelpunkt der Homologie derſelben, und demſelben Mittelpunkte entſprechen zwei Aren:

$$px+qy+1-\gamma(p'x+q'y+1)=0.$$

Wenn jede der Gleichungen (4) und (5) mit (6) verbunden wird, ſo erhält man daſſelbe Reſultat; folglich iſt die Are der Homologie eine gemeinſchaftliche Sehne beider Curven, und geht durch den Durchſchnittspunkt der Polaren des Mittelpunktes jeder dieſer Curven.

Betrachten wir das von den Diagonalen des um zwei Curven des zweiten Grades beſchriebenen Viereckes gebildete Dreieck (§. 150), ſo gehen durch eine Ecke a deſſelben zwei gemeinſchaftliche Sekanten; auf der gegenüberliegenden Seite A liegen zwei gegenüberliegende Ecken o, o_1 des umſchriebenen Viereckes; die Polaren von o in beiden Curven gehen durch den gemeinſchaftlichen Pol a von A; folglich ſind die Aren der Homologie des Mittelpunktes o die durch a gehenden beiden gemeinſchaftlichen Sekanten, und dem gegenüberliegenden Mittelpunkte o_1 entſprechen dieſelben Aren.

§. 174.

Homologie zweier reeller Curven des zweiten Grades.

Soll γ reell ſein, ſo iſt erforderlich, aber auch hinreichend, daß λ und λ' gleiche Zeichen haben, was immer ſtattfindet, wenn die beiden gemeinſchaftlichen Tangenten imaginär conjugirt ſind. — Denn in dieſem Falle kann

$$ax^2+bxy+cy^2$$

als die Summe zweier Quadrate angeſehen werden, welche z. B. das Zeichen + haben, und alsdann haben λ, λ' beide das Zeichen —, weil ſonſt die Curven imaginär wären.

Wenn die beiden gemeinſchaftlichen Tangenten reell ſind und zu den Coordinatenaxen genommen werden, ſo iſt $a=0$, $c=0$,

und wenn $\frac{\lambda}{b}$ negativ ist; so haben x, y stets dasselbe Zeichen, so daß die Curve S ganz in dem Winkel der Aren und in dem Scheitelwinkel desselben liegt. — Die Bedingung der Realität besteht also darin: daß die beiden Curven in demselben Winkel und in dem Scheitelwinkel desselben liegen.

Betrachtet man die Sache aus einem andern Gesichtspunkte, so ist γ reell, wenn die durch die Gleichung (6) ausgedrückten beiden gemeinschaftlichen Sekanten reell sind. — Wenn also die 4 gemeinschaftlichen Tangenten imaginär sind, oder blos 2 davon; so gibt es 2 reelle Mittelpunkte und 2 reelle Aren der Homologie. — Die Mittelpunkte sind im ersten Falle die Durchschnittspunkte der conjugirten Tangentenpaare, und im zweiten Falle der Durchschnittspunkt der beiden conjugirten imaginären Tangenten, und folglich auch der Durchschnittspunkt der beiden reellen Tangenten.

Wenn die 4 gemeinschaftlichen Tangenten reell sind, so findet eine Zweideutigkeit statt, und man muß die gemeinschaftlichen Sekanten untersuchen. — Entweder sind blos zwei gemeinschaftliche Sekanten reell, in welchem Falle es nur ein Paar reeller Mittelpunkte und Aren der Homologie gibt, oder die 6 gemeinschaftlichen Sekanten sind reell, und in diesem Falle gibt es 3 Paare reeller Mittelpunkte und Aren der Homologie.

In Fig. 185 sind zwei Curven des zweiten Grades dargestellt, welche sich in zwei reellen Punkten c, d schneiden; eine erste gemeinschaftliche Sekante ist cd, und es gibt noch eine zweite ebenfalls reelle gemeinschaftliche Sekante, nämlich die, welche die beiden andern conjugirten imaginären Durchschnittspunkte verbindet. Auch gibt es zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten, welche sich in o schneiden, und zwei imaginäre conjugirte Tangenten, welche sich in einem unbekannten reellen Punkte o_1 schneiden, und es kommt darauf an, den zweiten Mittelpunkt und die zweite Are der Homologie zu finden. Die Polaren des Punktes o in beiden Curven schneiden sich in a auf der Sekante cd, und wenn man aus o einen beliebigen Radius om zieht; so läßt sich die Homologie auf zwei Weisen herstellen, nämlich 1) wenn man die Punkte m und m', so wie n und n' zu homologischen nimmt; alsdann schneiden sich die Tangenten in diesen Punkten paarweise auf der ersten Are cd. — 2) Wenn man m und n', so wie n und m' zu den homologischen

Punkten nimmt, wo ſich alsdann die Tangenten in t und u ſchneiden, und die Gerade tau iſt die zweite Axe der Homologie. — Conſtruirt man die gemeinſchaftliche Polare oo_1 von a in beiden Curven und zieht von einem Punkte t der einen Axe die Tangenten tm_1, tm', ſo beſtimmt der Radius m_1m' den zweiten Mittelpunkt o_1, weil m_1 und m' homologiſche Punkte ſind. — Auf dieſe Weiſe hat man ſowohl den Durchſchnittspunkt o_1 der beiden imaginären gemeinſchaftlichen Tangenten der beiden Curven, als die Gerade at erhalten, welche die beiden gemeinſchaftlichen imaginären Punkte verbindet.

Wenn die beiden Curven außer einander liegen (Fig. 184), ſo gibt es nur die beiden Mittelpunkte o, o_1 der Homologie, und die beiden Axen oder die beiden reellen gemeinſchaftlichen Sekanten laſſen ſich leicht conſtruiren.

§. 175.

Curven des zweiten Grades, welche ſich berühren, oder einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt haben.

Die Gleichung der Curven des zweiten Grades, welche einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt haben, welcher als Anfangspunkt genommen wird, iſt von der Form:

$$x^2 + y^2 - (mx + ny + t)^2 = o,$$

und die Subſtitution der Werthe:

$$x = \frac{x'}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}, \quad y = \frac{y'}{\alpha x' + \beta y' + \gamma}$$

gibt eine Gleichung von derſelben Form. Man hat alſo den Lehrſatz:

20) Zwei Curven des zweiten Grades, welche einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt haben, geſtatten dieſen Brennpunkt als Mittelpunkt der Homologie.

Die Curven des zweiten Grades, welche dieſelbe Gerade in demſelben Punkte berühren, werden durch eine Gleichung von der Form ausgedrückt:

$$x^2 + y(mx + ny + t) = o,$$

wenn der Berührungspunkt zum Anfange und die Tangente zur Axe der x genommen wird. — Die Subſtitution der obigen Werthe für x und y gibt eine Gleichung von derſelben Form, und man hat folglich den Satz:

21) Zwei einander berührende Curven des zweiten Grades haben den Berührungspunkt zum Mittelpunkte der Homologie.

Dieſe Eigenſchaften führen zu einer großen Anzahl von Sätzen. — Wenn man aus dem Brennpunkte o als Mittelpunkt einen Kreis beſchreibt, und aus demſelben Punkte zwei bewegliche Halbmeſſer oaa', obb' zieht, welche einen conſtanten Winkel mit einander bilden; ſo umhüllt die Sehne ab des Kreiſes von conſtanter Länge einen concentriſchen Kreis; die homologiſche Sehne a'b' der Curve des zweiten Grades umhüllt folglich eine Curve des zweiten Grades, welche o zum Brennpunkte und mit der erſten Curve eine doppelte Berührung hat. Der Pol von ab beſchreibt einen concentriſchen Kreis und der von a'b' eine concentriſche Curve des zweiten Grades. — Man hat alſo den Lehrſatz:

22) Die Sehnen einer Curve des zweiten Grades, welche vom Brennpunkte aus unter einem conſtanten Winkel erſcheinen, umhüllen eine andere Curve des zweiten Grades, und der Pol dieſer Sehne beſchreibt eine dritte ſolche Curve. Die drei Curven haben ferner einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt und eine doppelte Berührung nach derſelben Geraden.

Beſchreibt man einen Kreis, welcher eine Curve des zweiten Grades in o berührt, und zieht aus o zwei bewegliche Radien, welche einen conſtanten Winkel mit einander bilden; ſo finden noch dieſelben Folgerungen ſtatt, ſo daß man den Satz hat:

23) Die von einem Punkte einer Curve des zweiten Grades aus unter einem conſtanten Winkel erſcheinenden Sehnen derſelben umhüllen eine andere Curve des zweiten Grades, und der Pol dieſer Sehnen beſchreibt eine dritte Curve deſſelben Grades. Endlich haben dieſe drei Curven auch eine doppelte imaginäre Berührung.

Zieht man an den Kreis zwei feſte und eine bewegliche Tangente, welche die erſten in a,b ſchneidet, ſo hat man in der Curve des zweiten Grades ebenfalls zwei feſte und eine bewegliche Tangente, welche die beiden erſten in den Punkten a', b' ſchneidet, die die homologiſchen von a,b ſind. — Der Winkel aob, unter welchem

das Stück ab der beweglichen Tangente vom Mittelpunkte aus erscheint, ist aber constant, und mithin hat man den Satz:

24) Der Winkel, unter welchem der zwischen zwei festen Tangenten einer Curve des zweiten Grades liegende Theil einer beweglichen Tangente vom Brennpunkte aus erscheint, ist constant.

Wenn man bei der Parabel die bewegliche Tangente als sich ins Unendliche entfernend betrachtet, so entfernen sich die Punkte a',b' ebenfalls ins Unendliche, oa',ob' werden zu den festen Tangenten parallel, und folglich der constante Winkel gleich dem Supplemente des gegen die Parabel gekehrten Winkels der Tangenten. Wenn t' der Durchschnittspunkt der beiden festen Tangenten ist, so ist $\angle t' + \angle o = 180°$; folglich läßt sich das Viereck oa't'b' in einen Kreis beschreiben, und man hat den Satz:

25) Der um ein um die Parabel beschriebenes Dreieck beschriebene Kreis geht durch den Brennpunkt der Parabel.

Da jeder Punkt dieses Kreises zum Brennpunkte einer die drei Geraden berührenden Parabel genommen werden kann, so folgt: daß der Ort der Brennpunkte der die drei Seiten eines Dreieckes berührenden Parabeln der um dieses Dreieck beschriebene Kreis ist. — Hieraus ergibt sich ein sehr einfaches Mittel zur Construction einer vier gegebene Gerade berührenden Parabel.

§. 176.

Homothetische Curven des zweiten Grades.

Die Homothetie ist ein besonderer Fall der Homologie; denn wenn sich die Axe ins Unendliche entfernt, so reduciren sich die Formeln (3) auf:

$$x = \frac{x'}{\gamma}, y = \frac{y'}{\gamma}$$

und der Mittelpunkt der Homologie wird der Mittelpunkt der Homothetie.

Zwei homothetische Curven des zweiten Grades S,S' schneiden sich nur in zwei reellen, oder in zwei conjugirten imaginären Punkten, weil die beiden andern Durchschnittspunkte in unendlicher Entfernung liegen. Sie haben nur eine gemeinschaftliche Sekante A,

welche immer reell ist, und dieser Axe der Homologie entsprechen zwei Mittelpunkte der Homothetie.

Zieht man einen beliebigen Radius aus dem Mittelpunkte o (Fig. 186), so sind a und a',b und b' homologische Punkte, und die Tangentenpaare geben zwei Punkte c,d der Axe A. Zieht man ebenso aus dem Mittelpunkte o_1 einen beliebigen Radius, so sind a und a'_1,b und b'_1 homologische Punkte, und die Tangentenpaare schneiden sich ebenfalls auf der Axe A.

Die Polaren P und P', P_1 und P'_1 der beiden Aehnlichkeitsmittelpunkte o, o_1 in beiden Curven sind zu der Axe A parallel und gleichweit davon entfernt. Denn wenn man einen der Mittelpunkte der Homothetie zum Anfangspunkte nimmt, so sind die Gleichungen der beiden Curven:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=o,$$
$$ax'^2+bx'y'+cy'^2+k(dx'+ey'+fk)=o.$$

Die Gleichung der Axe der Homologie oder der gemeinschaftlichen Sekante ist:

$$dx+ey+fk+f=o,$$

und die Gleichungen der beiden Polaren des Anfangspunktes:

$$dx+ey+2f=o,\quad dx+cy+2kf=o.$$

Wenn drei homothetische Curven des zweiten Grades gegeben sind, so haben wir gesehen, daß die Mittelpunkte der Homothetie je drei in gerader Linie liegen. Die Gleichungen dieser Curven sind:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=o,$$
$$ax^2+bxy+cy^2+d'x+e'y+f'=o,$$
$$ax^2+bxy+cy^2+d''x+e''y+f''=o,$$

und die der Axen der Homologie:

$$(d-d')x+(e-e')y+f-f'=o,$$
$$(d'-d'')x+(e'-e'')y+f'-f''=o,$$
$$(d''-d)x+(e''-e)y+f''-f=o.$$

Da sich die drei letzten Gleichungen auf zwei reduciren, so hat man den Satz:

26) Die drei Axen der Homologie dreier homothetischer Curven des zweiten Grades gehen durch denselben Punkt.

§. 177.

Die Gerade oo, deren gemeinschaftlicher Pol für beide Curven

in unendlicher Entfernung liegt, geht durch die Mittelpunkte der Curven. — Wenn zwei homothetiſche Curven des zweiten Grades einander berühren, ſo liegt der Berührungspunkt als Mittelpunkt der Homothetie auf der Centrallinie. — Wenn S und S′ zwei homothetiſche Curven des zweiten Grades ſind, und S_1 iſt eine dritte, welche die beiden erſten in a und a′ (Fig. 187) berührt; ſo ſchneiden ſich die gemeinſchaftlichen Tangenten in a und a′ als Aren der Homologie in einem Punkte t_1 der Are A von S und S′. Die Punkte a, a′ ſind folglich homologiſche und liegen auf einem Radius oaa′. Dieſer Radius hat in den drei Curven drei homologiſche Punkte t, t′ t_1 zu Polen, und folglich ſind die drei Parallelen zu P, A, P′ homologiſche Gerade. — Wenn man alſo eine Curve des zweiten Grades S_1 hat, welche zu zwei homothetiſchen Curven S, S′ deſſelben Grades homothetiſch und tangent iſt; ſo hat die Are der Homologie A von S, S′, als Gerade von S_1 betrachtet, in S, S′ die Polaren P, P′ des Mittelpunktes o der Homothetie zu homologen Geraden.

Hieraus ergibt ſich das Mittel zur Conſtruction einer Curve S_1 des zweiten Grades, welche zu drei gegebenen homothetiſchen Curven S, S′, S″ deſſelben Grades homothetiſch iſt und dieſelben berührt. — Man conſtruirt nämlich die Mittelpunkte p, q, r der Homothetie und die Aren der Homologie A, B, C von S und S′, S und S″, S′ und S″, dann die Polaren P und P′ von p in S und S′, die Polaren Q und Q″ von q in S und S″, die Polaren R′ und R″ von r in S′ und S″. Es ſei i_1 der Durchſchnittspunkt der Aren der Homologie, i der von P und Q, i′ der von P′ und R′, i″ der von Q″ und R″. Wird S_1 ſucceſſive mit S, S′, S″ verbunden, ſo erhält man drei homothetiſche Syſteme, und wir haben geſehen, daß die Geraden A und B in S_1 in S die Geraden P und Q als homologe haben. Alſo iſt i der homologe Punkt von i_1 und i_1 in S, hat als homologe Punkte i, i′, i″ in S, S′, S″. Die Geraden i_1 i, i_1 i′, i_1 i″ gehen mithin durch die Mittelpunkte der Homothetie von S_1 und S, von S_1 und S′, von S_1 und S″ welche hier die Berührungspunkte a, a′, a″ ſind. Nachdem dieſe Berührungspunkte gefunden ſind, erhält man den Mittelpunkt von S_1 vermittelſt des Durchſchnittes der von den Mittelpunkten nach den Berührungspunkten gezogenen Geraden. Die Aufgabe iſt alſo gelöſ't, und als beſondern Fall gibt dieſe Conſtruction den Kreis, welcher drei gegebene Kreiſe berührt.

§. 178.

Perſpektiviſche Projektion.

Wenn man einen beliebigen Punkt o des Raumes mit verſchiedenen Punkten a, b, c, ... durch gerade Linien verbindet, ſo heißen die Durchſchnittspunkte der Geraden oa, ob, oc, ... mit einer feſten Ebene M' die perſpektiviſchen Projektionen der Punkte a, b, c, ... Wenn der Punkt a eine Gerade beſchreibt, ſo beſchreibt ſeine perſpektiviſche Projektion auch eine Gerade. Es entſprechen alſo den Punkten und Geraden der erſten Figur auch Punkte und Gerade in der perſpektiviſchen Figur und nach §. 163 iſt das anharmoniſche Verhältniß von vier in gerader Linie liegenden Punkten dem anharmoniſchen Verhältniſſe ihrer perſpektiviſchen Projektionen gleich.

Wenn in einer Ebene M eine Figur gegeben iſt, ſo kann auf dieſe Weiſe in einer andern Ebene M' die perſpektiviſche Projektion derſelben gezeichnet werden, und beide Figuren haben alsdann alle Eigenſchaften homographiſcher Figuren. — Wenn man in der Ebene M zwei Coordinatenaxen und in der Ebene M' auch zwei ſolche Axen zieht, ſo haben die Relationen, welche zwiſchen den Coordinaten x, y eines Punktes a und den Coordinaten x', y' ſeiner perſpektiviſchen Projektion a' ſtattfinden, nothwendig die Form (1), und folglich iſt die Methode der perſpektiviſchen Projektion eine geometriſch-homographiſche.

Hieraus folgt: wenn ein Kegel, deſſen Richtlinie eine Curve des m^{ten} Grades iſt, mit einer Ebene durchſchnitten wird, ſo iſt die Durchſchnittscurve auch vom m^{ten} Grade. — Iſt alſo die Richtlinie eine Curve des zweiten Grades, ſo iſt auch die Durchſchnittslinie des Kegels mit einer Ebene eine Curve des zweiten Grades, wie ſich leicht direkt zeigen läßt, wenn die Baſis des Kegels ein Kreis iſt. — Man nennt deshalb die Curven des zweiten Grades auch Kegelſchnitte.

Der Durchſchnitt einer durch o parallel zu M gelegten Ebene mit M' iſt die Axe l' des Unendlichen, auf welcher ſich die perſpektiviſchen Projektionen zweier Parallelen ſchneiden, und dieſer Durchſchnittspunkt iſt zugleich der von M' mit der durch o parallel zu den gegebenen Parallelen gezogenen Geraden.

Da eine Gerade und ihre perſpektiviſche Projektion in derſelben durch o gehenden Ebene liegen, ſo ſchneiden ſie ſich auf der Durch-

ſchnittslinie A der Ebenen M und M′, und alle Punkte von A ſind ihre eigenen perſpektiviſchen Projektionen. — Wenn ſich die Ebene M′ um die Gerade A ſo lange drehet, bis ſie mit M zuſammenfällt, ſo gibt es einen Punkt c′, welcher mit ſeiner perſpektiviſchen Projektion zuſammenfällt. Denn wir wollen durch o eine auf A ſenkrechte Ebene legen, und es ſeien ac, ac′ die Durchſchnitte dieſer Ebene mit M und M′. Ferner wollen wir in dieſer Ebene von o aus eine auf der Halbirungslinie des Winkels cac′ ſenkrechte Gerade occ′ ziehen, ſo fällt der Punkt c′ wegen ac = ac′ auf ſeine perſpektiviſche Projektion c′. — Man hat alſo nach dem Zuſammenfallen beider Ebenen in derſelben Ebene M zwei homologiſche Figuren, indem c der Mittelpunkt und A die Axe der Homologie iſt. Die perſpektiviſche Projektion kommt alſo auf die Homologie zurück, und man ſieht leicht ein, daß ſie dieſelbe Allgemeinheit hat.

Wenn die Ebenen M und M′ parallel ſind, ſo entfernt ſich die Axe A ins Unendliche, und die beiden Figuren werden homothetiſch. Folglich ſind die Durchſchnitte eines Kegels mit parallelen Ebenen ähnliche Figuren.

Fünfundzwanzigſtes Kapitel.

Correlative Figuren.

§. 179.

Wenn man ſetzt:

$$X' = ax' + by' + c,\ Y' = a'x' + b'y' + c',\ U' = a''x' + b''y' + c'', \quad (1)$$

ſo entſpricht dem Punkte a oder (x, y) der erſten Figur in der zweiten eine Gerade A′, deren Gleichung:

$$X'x + Y'y + U' = o$$

iſt, wo x′, y′ die laufenden Coordinaten bedeuten, und der Geraden A der erſten Figur, welche durch die Gleichung:

$$px + qy + 1 = o$$

ausgedrückt wird, entſpricht in der zweiten Figur ein Punkt a′, welcher durch die Relationen:

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{U}{1}$$

bestimmt wird.

Es entsprechen also den Punkten a und den Geraden A der ersten Figur resp. Gerade A′ und Punkte a′ der zweiten Figur. Der Punkt a′ ist der Pol der Geraden A und die Gerade A′ die Polare des Punktes a. — Man hat daher die beiden Fundamentalsätze:

27) Wenn der Punkt a eine Gerade A beschreibt, so drehet sich seine Polare A′ um den Pol a′ dieser Geraden.

28) Wenn sich die Gerade A um den Punkt a drehet, so beschreibt ihr Pol a′ die Polare A′ dieses Punktes.

Wenn sich die Gerade A ins Unendliche entfernt, so convergirt ihr Pol gegen den Punkt i′, welcher durch die Relationen:

$$X' = 0, \quad Y' = 0$$

bestimmt wird, und der Pol des Unendlichen genannt werden kann. — Umgekehrt, die Polare eines unendlich entfernten Punktes geht durch i′.

Wenn also eine aus Punkten und Geraden bestehende Figur gegeben ist, so erhält man auf diese Weise eine aus Geraden und Punkten bestehende correlative Figur, und jede descriptive Relation zwischen den Theilen der ersten Figur führt zu einer entsprechenden Relation zwischen den Theilen der zweiten Figur. — Wenn z. B. in der ersten Figur drei Punkte in gerader Linie liegen, so gehen die drei entsprechenden Geraden in der zweiten Figur durch denselben Punkt.

§. 180.

Correlative Curven

Es seien A, B, C, . . . die Seiten und a, b, c, . . . die Winkelspitzen eines Vieleckes. Construirt man die Pole a′, b′, c′, . . . der Seiten A, B, C, . . . und verbindet sie durch die Geraden A′, B′, C′, . . . , welche die Polaren der Ecken a, b, c, . . . sind; so erhält man ein zweites Vieleck, welches das correlative des ersten ist. — Wenn b gegen a convergirt, so wird a der Berührungspunkt von A, und b′ convergirt gleichzeitig gegen a′ und die Gerade A′ wird Tangente in a′ an der zweiten Curve. — Jede

Tangente A der gegebenen Curve hat alſo einen Punkt a' der correlativen Curve zum Pole, und der Berührungspunkt von A hat die Tangente im Punkte a' der zweiten Curve zur Polare. — Kurz: die Punkte von S' ſind die Pole der Tangenten an S, und die Tangenten an S' ſind die Polaren der Punkte von S.

Wenn die gegebene Figur aus einer Curve und aus einer dieſe in n Punkten ſchneidenden Geraden beſteht, ſo beſteht die correlative Figur aus einer Curve und aus n von demſelben Punkte ausgehenden Tangenten.

Beſteht die gegebene Figur aus zwei Curven S, T und man conſtruirt die correlativen Curven S', T', ſo ſind die gemeinſchaftlichen Punkte von S', T' die Pole der gemeinſchaftlichen Tangenten von S, T, und die gemeinſchaftlichen Tangenten von S', T' ſind die Polaren der gemeinſchaftlichen Punkte von S, T.

Die Gleichung einer Curve S ſei:

$$f(x, y) = 0,$$

ſo hat die Tangente derſelben im Punkte (x, y) den Punkt (x', y') zum Pole, welcher durch die Relationen:

$$\frac{X'}{f'_x} = \frac{Y'}{f'_y} = \frac{U'}{\psi + 2\chi + \ldots}$$

beſtimmt wird, und wenn man x, y zwiſchen dieſen drei Gleichungen eliminirt; ſo erhält man die Gleichung der correlativen Curve S'. Oder: die Curve S' kann als die Umhüllungscurve der Polaren:

$$X'x + Y'y + U = 0$$

der verſchiedenen Punkte (x, y) von S betrachtet werden. — Setzt man nun:

$$X = ax + a'y + a'', \quad Y = bx + b'y + b'', \quad U = cx + c'y + c'', \qquad (2)$$

ſo wird die Gleichung der Polare:

$$Xx' + Yy' + U = 0$$

oder:

$$px' + qy' + 1 = 0,$$

wenn geſetzt wird:

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{U}{1}.$$

Vermittelſt dieſer letzten Relationen kann man x und y durch Brüche ausdrücken, deren Zähler und Nenner lineare Funktionen von p, q ſind, und zwar iſt der Nenner des Ausdruckes von x derſelbe, als der des Ausdruckes von y. — Subſtituirt man dieſe Werthe für x, y in die Gleichung f (x, y) = 0, ſo erhält man

die Gleichung der Curve S' mit p und q, welche von demſelben Grade iſt. — Man hat alſo den Lehrſatz:

29) Die correlative Curve eines Kegelſchnittes iſt ein anderer Kegelſchnitt.

§. 181.

Es ſeien a, b, c, d vier in gerader Linie liegende Punkte, und A', B', C', D' die ſich in demſelben Punkte ſchneidenden Polaren derſelben. Wir wollen die Gerade abcd zur Axe der x nehmen, ſo ſchneidet dieſe Axe das Büſchel der Polaren in vier Punkten a', b', c', d'. Die Gleichung jeder der Polaren reducirt ſich auf die Form:

$$X'x + U' = 0,$$

woraus folgt:

$$x = -\frac{U'}{X'} = -\frac{a''x' + c''}{ax' + c},$$

indem x' die Abſciſſe des Punktes a' bedeutet. — Dieſe Gleichung drückt eine homographiſche Relation zwiſchen den Punkten a, b, c, d und a', b', c', d' aus, ſo daß die anharmoniſchen Verhältniſſe dieſer beiden Syſteme von Punkten dieſelben ſind, und man folglich den Satz hat:

30) Das anharmoniſche Verhältniß von vier in gerader Linie liegenden Punkten iſt dem anharmoniſchen Verhältniſſe der entſprechenden vier Polaren gleich.

Dieſer Lehrſatz kann folgendermaßen umgeformt werden: Man hat:

$$\frac{\sin(C', A')}{\sin(C', B')} : \frac{ca}{cb} = \frac{\sin(D', A')}{\sin(D', B')} : \frac{da}{db},$$

und wenn man annimmt, daß die drei Punkte a, b, d, ſo wie ihre Polaren feſt liegen; ſo iſt der zweite Theil der letzten Gleichung eine Conſtante m; eine beliebige Gerade C trifft ab in c, und der Pol c' liegt auf C'. Bedeuten ferner p, q die Abſtände der Geraden C von den beiden feſten Punkten a, b und p', q' die Entfernungen des Poles c' von den beiden feſten Geraden A', B'; ſo hat man:

$$\frac{ca}{cb} = \frac{p}{q}, \quad \frac{\sin(C', A')}{\sin(C', B')} = \frac{p'}{q'},$$

folglich:

$$\frac{p'}{q'} : \frac{p}{q} = m.$$

Man hat also den Satz:

31) Das Verhältniß der Abstände einer beliebigen Geraden der ersten Figur von zwei festen Punkten ist dem Verhältnisse der Entfernungen des Poles jener Geraden von den beiden festen Polaren in der zweiten Figur proportional.

Die umgekehrten Sätze finden ebenfalls statt; denn die erste Figur ist auch die correlative der zweiten, und da jede metrische Relation nur anharmonische Verhältnisse enthält; so hat sie ihre entsprechende in der zweiten Figur.

§. 182.

Gegenseitige oder reciproke Correlation.

Die Formeln (1) drücken die Correlation der zweiten Figur in Bezug auf die erste, und die Formeln (2) die der ersten in Beziehung auf die zweite aus. — Da die Constanten verschieden sind, so ist die Art der Correlation nicht mehr dieselbe. Sollen die Figuren nach derselben Weise gegenseitig correlativ sein, so müssen die einander entsprechenden Constanten einander gleich und von demselben Zeichen, oder gleich und von entgegengesetztem Zeichen sein.

Im ersten Falle ist $a' = b$, $a'' = c$, $b'' = c'$, so daß nur 6 Constanten bleiben, und man hat:

$$X' = ax' + by' + c,\quad Y' = bx' + b'y' + c',\quad U' = cx' + c'y' + c'',$$
$$X = ax + by + c,\quad Y = bx + b'y + c',\quad U = cx + c'y + c''.$$

Betrachten wir die Curve des zweiten Grades:

$$ax^2 + 2bxy + b'y^2 + 2cx + 2c'y + 2c'' = o, \qquad (3)$$

so ist die Gerade A' die Polare des Punktes a in Beziehung auf die Richtcurve (3), und umgekehrt, die Gerade A ist die Polare des Punktes a' in Bezug auf dieselbe Richtcurve. Die Methode der reciproken Polaren (Kap. 19) erscheint hier also als eine besondere Art der Correlation.

Im zweiten Falle ist $a = o$, $a' = -b$, $a'' = -c$, $b' = o$, $b'' = -c'$, $c'' = o$; folglich:

$$X' = by' + c,\quad Y' = -bx' + c',\quad U' = -cx' - c'y';$$
$$X = -by - c,\quad Y = bx - c',\quad U = cx + c'y.$$

Die Gerade A', deren Gleichung ist:

$$(y' - y)\left(x - \frac{c'}{b}\right) - (x' - x)\left(y + \frac{c}{b}\right) = o,$$

geht durch den Punkt a und durch den festen Punkt $\left(\frac{c'}{b}, -\frac{c}{b}\right)$, die Curve S' reducirt sich auf einen Punkt, und mithin kann diese Transformationsart von keinem Nutzen sein.

§. 183.

Anwendungen.

Einem und demselben Vierecke umschriebenen Kegelschnitten entsprechen in dasselbe Viereck beschriebene Kegelschnitte. Folglich ist der Lehrsatz 3) in §. 158 der correlative von dem Lehrsatze 2) und der Satz 6) in §. 166 führt auf folgenden correlativen:

32) Wenn man von einem beliebigen Punkte Tangenten an drei in dasselbe Viereck beschriebene Kegelschnitte zieht, so erhält man ein Büschel von sechs Geraden, welche eine Involution bilden, und die beiden Tangenten an demselben Kegelschnitte sind conjugirt.

Aus den Lehrsätzen 7) und 8) ergeben sich durch Correlation:

33) Wenn ein Viereck um einen Kegelschnitt beschrieben ist, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte, worin eine bewegliche Tangente die Seiten dieses Viereckes schneidet, constant.

34) Wenn man auf zwei festen Geraden zwei Reihen von Punkten von solcher Beschaffenheit nimmt, daß das anharmonische Verhältniß von vier beliebigen Punkten der ersten Reihe dem anharmonischen Verhältnisse der vier correspondirenden Punkte der zweiten Reihe gleich ist, und man verbindet die correspondirenden Punkte paarweise durch gerade Linien; so umhüllen diese einen Kegelschnitt, welcher die beiden festen Geraden berührt.

Der correlative des Lehrsatzes 10) ist bereits in §. 140 angeführt, und der Satz 11 gibt folgenden correlativen:

35) Wenn die n Ecken eines Vieleckes auf n festen Geraden fortgleiten, während n—1 Seiten desselben auf Kegelschnitten fortrollen, wovon jeder zwei aufeinanderfolgende Gerade berührt; so

umhüllt die nte Seite des Vieleckes einen Kegelschnitt, welcher zwei aufeinanderfolgende Gerade berührt.

Zwei Kegelschnitten, welche eine doppelte Berührung haben, entsprechen zwei Kegelschnitte, welche ebenfalls eine doppelte Berührung haben. Aus den Sätzen 12) und 14) ergeben sich mithin durch Correlation:

36) Wenn zwei Winkelspitzen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Dreieckes auf zwei festen Geraden fortgleiten, so beschreibt die dritte Winkelspitze des Dreieckes einen andern Kegelschnitt, welcher mit dem ersten eine doppelte Berührung hat. — Der Durchschnittspunkt der beiden festen Geraden ist der Pol der Berührungssehne.

37) Wenn ein Vieleck von n Seiten um einen Kegelschnitt beschrieben ist, und jede von n — 1 Ecken desselben auf einer Geraden, oder auf einem Kegelschnitte fortgleitet, welcher mit dem ersten eine doppelte Berührung hat; so beschreibt die nte Ecke des Vieleckes auch einen Kegelschnitt, welcher mit dem ersten eine doppelte Berührung hat.

Endlich gibt der Lehrsatz 16) durch Correlation:

38) Wenn ein Vieleck von n Seiten um einen Kegelschnitt beschrieben ist und n — 1 Ecken desselben auf n — 1 Kegelschnitten fortgleiten, welche mit dem ersten in dasselbe Viereck beschrieben sind, so beschreibt die nte Ecke einen Kegelschnitt, welcher in dasselbe Viereck beschrieben ist.

§. 184.

Ueberblick.

Wir können jetzt die im Vorhergehenden auseinandergesetzten allgemeinen Methoden, deren Fruchtbarkeit zugleich an vielen Beispielen gezeigt ist, mit kurzen Worten charakterisiren: 1) die Homographie verallgemeinert die in einem besondern Falle bewiesenen Eigenschaften einer Figur. 2) Die Correlation verdoppelt die Anzahl der

Lehrſätze. — Wir haben übrigens dieſen Gegenſtand bei weitem nicht erſchöpft, und man kann mit Hülfe der bewieſenen Lehrſätze ſehr einfach eine große Anzahl intereſſanter Aufgaben über die Kegelſchnitte löſen, wovon wir nur einige zur Uebung hier anführen wollen.

Uebungsaufgaben.

1) In einen gegebenen Kegelſchnitt ein Vieleck zu beſchreiben, deſſen n Seiten Kegelſchnitte berühren, wovon jeder mit dem erſten eine doppelte Berührung hat, oder durch gegebene Punkte geht.

2) Um einen gegebenen Kegelſchnitt ein Vieleck zu beſchreiben, deſſen n Ecken auf gegebenen Geraden, oder auf Kegelſchnitten liegen, welche mit dem gegebenen eine doppelte Berührung haben.

3) Ein n Eck zu beſchreiben, deſſen n Seiten durch gegebene Punkte gehen und deſſen n Ecken auf gegebenen Geraden liegen.

4) Wenn die n feſten Punkte in Lehrſatz 10) in gerader Linie liegen, zu beweiſen: daß die freie Ecke auch eine Gerade beſchreibt.

5) Es ſeien a, b zwei Punkte von ſolcher Beſchaffenheit: daß die Polare des einen durch den andern geht. Wenn zwei Seiten eines in einen Kegelſchnitt beſchriebenen Dreieckes ſich um a, b drehen, ſo drehet ſich die dritte Seite um den Pol c von ab. — Man ſoll aus dieſem Lehrſatze den correlativen herleiten.

6) Wenn drei Seiten eines in einen Kegelſchnitt beſchriebenen Viereckes ſich um drei in gerader Linie liegende feſte Punkte drehen, ſo drehet ſich die vierte Seite um einen andern feſten Punkt, welcher mit den drei erſten in derſelben Geraden liegt. — Dieſer Satz gilt auch für ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl, und man ſoll den correlativen Satz daraus ableiten.

7) Wenn alle Spitzen eines Vieleckes, mit Ausnahme einer einzigen, auf einem Kegelſchnitte liegen und die Seiten ſich um feſte in gerader Linie liegende Punkte drehen, ſo beſchreibt die freie Winkelſpitze einen Kegelſchnitt. Man ſoll den correlativen Satz ableiten.

9) Wenn ein Vieleck zugleich in einen Kreis und um einen andern beſchrieben iſt, die Entfernung der Mittelpunkte als Funktion der Halbmeſſer für die einfachſten Fälle des Dreieckes, Viereckes, Fünfeckes, . . . zu finden.

10) Wenn ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl zugleich in einen Kegelſchnitt und um einen andern beſchrieben iſt, ſo gehen die Geraden, welche die gegenüberliegenden Ecken, oder die Berührungspunkte der Gegenſeiten verbinden, durch denſelben Punkt, welches einer der Durchſchnittspunkte der gemeinſchaftlichen conjugirten Sekanten iſt. — Den Beweis zu führen.

11) Einen Kegelſchnitt zu conſtruiren, welcher mit einem andern eine doppelte Berührung hat, durch n Punkte geht und 3—n Gerade berührt.

12) Wenn vier von demſelben Punkte ausgehende Gerade einen Kreis reſp. in den Punkten a und a', b und b', ꝛc. ſchneiden, zu beweiſen: daß die Relation ſtattfindet:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} ca}{\sin \frac{1}{2} cb} : \frac{\sin \frac{1}{2} da}{\sin \frac{1}{2} db} = \frac{\sin \frac{1}{2} c'a'}{\sin \frac{1}{2} c'b'} : \frac{\sin \frac{1}{2} d'a'}{\sin \frac{1}{2} d'b'}.$$

13) Wenn ein beliebiger Kegelſchnitt und ein Punkt o in ſeiner Ebene gegeben iſt, und man conſtruirt einen zweiten Kegelſchnitt von ſolcher Beſchaffenheit: daß o zugleich ſein Mittelpunkt und ein Mittelpunkt der Homologie beider Curven iſt; ſo iſt jedes Syſtem conjugirter Durchmeſſer des zweiten Kegelſchnittes ein Syſtem conjugirter Gerader des erſten in Bezug auf den Punkt o. — Man ſoll hieraus und aus den Formeln für die Conſtruction homologiſcher Figuren die Eigenſchaften der conjugirten Geraden herleiten, welche denen der conjugirten Durchmeſſer analog ſind.

14) Wenn man durch den Punkt o der Ebene eines Kegelſchnittes eine bewegliche Sekante zieht und auf derſelben eine Länge om von ſolcher Beſchaffenheit nimmt, daß ihr reciproker Werth $\frac{1}{om}$ der Summe, oder Differenz der reciproken Werthe der zwiſchen dem Kegelſchnitte und dem feſten Punkte liegenden Längen gleich iſt, jenachdem der feſte Punkt innerhalb, oder außerhalb des Kegelſchnittes liegt; ſo beſchreibt der Punkt m einen neuen Kegelſchnitt.

Sechsundzwanzigſtes Kapitel.

Theorie der Transverſalen.

§. 185.

Es ſei $f(x, y) = o$ die Gleichung einer Curve des $m$ten Grades unter ganzer Form, und $\varphi(x, y)$ bezeichne die Glieder des $m$ten Grades. Durch einen beliebigen Punkt i oder (x_1, y_1) der Ebene wollen wir eine Gerade ziehen, welche mit den Axen Winkel bildet, deren Coſinus p und q ſind, ſo ſchneidet dieſe Gerade die Curve in m Punkten a', a'', a''', . . ., und wenn ρ die Entfernung des Punktes i von irgend einem der Durchſchnittspunkte bedeutet; ſo iſt:

$$x = x_1 + p\rho, \quad y = y_1 + q\rho,$$

und:

$$f(x, y) = f(x_1, y_1) + A\rho + B\rho^2 + \ldots + \varphi(p, q)\rho^m = o,$$

alſo das Produkt der Wurzeln dieſer Gleichung:

$$ia' \cdot ia'' \cdot ia''' \ldots = \pm \frac{f(x_1, y_1)}{\varphi(p, q)}.$$

Betrachten wir nun die Curve $\varphi(x, y) = \pm 1$ und ziehen durch den Anfangspunkt o einen zu der Sekante $ia'a'' \ldots$ parallelen Radius oa; ſo iſt:

$$\overline{oa}^m = \pm \frac{1}{\varphi(p, q)};$$

folglich:

$$\frac{ia' \cdot ia'' \cdot ia''' \ldots}{\overline{oa}^m} = f(x_1, y_1) \qquad (1)$$

und man hat mithin den Satz:

1) Wenn man aus dem Punkte i eine beliebige Sekante durch die Curve $f(x, y) = o$ zieht, ſo iſt das Verhältniß des Produktes der m Abſchnitte dieſer Sekante zur $m$ten Potenz des vom Anfangspunkte nach der Hülfscurve $\varphi(x, y) = \pm 1$ gezogenen und zu der Sekante parallelen Radiusvectors conſtant.

Zieht man von i aus eine andere Sekante ib'b'' . . . . , so hat man ebenso:

$$\frac{ib' \cdot ib'' \cdot ib''' \ldots}{\overline{ib}^m} = f(x_1, y_1);$$

folglich:

$$\frac{ia' \cdot ia'' \cdot ia''' \ldots}{ib' \cdot ib'' \cdot ib''' \ldots} = \frac{\overline{oa}^m}{\overline{ob}^m}.$$

d. h.: 2) Wenn man durch verschiedene Punkte der Ebene einer Curve parallele Sekantenpaare zieht, so ist das Verhältniß des Produktes der Abschnitte der einen Sekante zu dem Produkte der Abschnitte der andern Sekante constant.

§. 186.

Wenn die gegebene Curve vom zweiten Grade ist, so kann man sie selbst, auf ihren Mittelpunkt bezogen, zur Hülfscurve nehmen, so daß oa der vom Mittelpunkte der gegebenen Curve aus zu der Sekante parallel gezogene Radiusvector ist.

Da die Gleichung der Parabel von der Form $y^2 + Ax = o$ ist, so kann man eine beliebige Parallele zur Axe als Hülfscurve nehmen, und wenn a, b die Punkte sind, worin diese Parallele von den beiden Sekanten geschnitten wird; so hat man die Relation:

$$\frac{ia' \cdot ia''}{\overline{ia}^2} = \frac{ib' \cdot ib''}{\overline{ib}^2}.$$

Von dem Punkte i wollen wir eine Tangente ib (Fig. 188) an die Parabel ziehen und die durch den Berührungspunkt b zur Axe gezogene Parallele zur Hülfslinie nehmen, so fallen für ib die drei Punkte b, b', b'' zusammen, und es ist:

$$\frac{ia' \cdot ia''}{\overline{ia}^2} = 1 \text{ oder } ia' \cdot ia'' = \overline{ia}^2.$$

Beschreibt man in der Ebene der Curve ein beliebiges Dreieck ghi, so bestimmt die Curve auf der Seite hi, m Punkte a', a'', . . ., auf der Seite ig, m Punkte b', b'', . . . und auf der Seite gh, m Punkte c', c'', ..., und durch Multiplikation der Relationen:

$$\frac{gc' \cdot gc'' \ldots}{gb' \cdot gb'' \ldots} = \frac{\overline{oc}^m}{\overline{ob}^m},$$

$$\frac{ha' \cdot ha'' \ldots}{hc' \cdot hc'' \ldots} = \frac{\overline{oa}^m}{\overline{oc}^m},$$

$$\frac{ib' \cdot ib'' \ldots}{ia' \cdot ia'' \ldots} = \frac{\overline{ob}^m}{\overline{oa}^m}$$

ergibt ſich:

$$\frac{gc' \cdot gc'' \ldots\ ha' \cdot ha'' \ldots\ ib' \cdot ib'' \ldots}{gb' \cdot gb'' \ldots\ hc' \cdot hc'' \ldots\ ia' \cdot ia'' \ldots} = 1. \quad (3)$$

In dem beſondern Falle, wo ſich die Curve auf eine Gerade reducirt, ergibt ſich aus der Relation (3) der Satz in §. 38.

§. 187.

Conſtruction der Tangente.

Wenn ſich der Punkt i der Curve unendlich nähert, ſo fallen zwei Durchſchnittspunkte a', b' in i zuſammen und die Gerade a'b' wird Tangente in dieſem Punkte. Bezeichnen nun α, β die Winkel, welche dieſe Gerade mit ig und ih bildet, ſo verwandelt ſich die Relation (3) wegen:

$$\frac{ia'}{ib'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

in:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{ib' \cdot ib'' \ldots\ hi \cdot ha' \cdot ha'' \ldots\ gc' \cdot gc'' \ldots}{ai'' \cdot ai''' \ldots\ gi \cdot gb \cdot gb'' \ldots\ hc' \cdot hc'' \ldots}. \quad (4)$$

Um alſo die Tangente in i zu conſtruiren, zieht man durch dieſen Punkt zwei beliebige Sekanten ig, ih, hierauf in der Ebene eine willkürliche dritte Sekante gh und wendet die Gleichung (4) an.

§. 188.

Conſtruction des Osculations- oder Krümmungskreiſes.

Wenn, indem ſich der Punkt i der Curve unendlich nähert, gleichzeitig die Sekante ih ſich der Tangente in i unbeſchränkt nähert; ſo fällt ein zweiter Durchſchnittspunkt a'' mit a' in i zuſammen, und der durch die drei Punkte b', a', a'' gehende Kreis heißt an der Grenze der Krümmungs- oder Osculationskreis. Bezeichnet nun b_1 den Punkt, wo die Gerade ig den Kreis trifft, ſo iſt:

$$ia' \cdot ia'' = ib' \cdot ib_1,$$

und die Relation (3) gibt:

$$ib_1 = \frac{ib' \cdot ib'' \ldots \overline{hi}^2 \cdot ha''' \ldots gc' \cdot gc'' \ldots}{ia''' \ldots gi \cdot gb''' \ldots hc' \cdot hc'' \ldots}.$$

Da ferner der Krümmungskreis die Curve berührt, so liegt sein Mittelpunkt auf der Normale, und die Kenntniß des Punktes b_1 ist zu seiner Construktion hinreichend.

Um also den Krümmungskreis für den Punkt i zu construiren, zieht man die Tangente ih in diesem Punkte, eine Sekante ig und in der Ebene der Curve eine willkürliche Sekante gh. Wenn man für ig die Normale der Curve nimmt, so ist ib_1 der Durchmesser des Osculationskreises.

§. 189.

Osculations- oder Krümmungskreis eines Kegelschnittes.

Verlegt man den Punkt g in den Mittelpunkt o des Kegelschnittes, so hat man:

$$ib_1 = \frac{2oi \cdot \overline{hi}^2 \cdot \overline{oc'}^2}{\overline{oi}^2 \cdot hc' \cdot hc''} = \frac{2\overline{oc,}^2}{oi} \cdot \frac{\overline{hi}^2}{\overline{ho}^2 - \overline{oc}^2},$$

und wenn sich der Punkt h auf der Tangente ins Unendliche entfernt:

$$\text{Gr.} \frac{hi}{ho} = 1, \text{Gr.} \frac{\overline{hi}^2}{\overline{ho}^2 - \overline{oc}^2} = 1, \text{ also: } ib_1 = \frac{2\overline{oc'}^2}{oi}.$$

Bezeichnen nun a, b die halben Axen des Kegelschnittes, welcher eine auf diese Axen bezogene Ellipse sei, a', b' die halben conjugirten Durchmesser oi, oc', ferner α den Winkel der letztern und r den Halbmesser des Osculationskreises; so ergibt sich mittelst der Relationen in §. 127:

$$r = \frac{ob^1}{2\sin\alpha} = \frac{b'^2}{a'\sin\alpha} = \frac{b'^3}{a'b'\sin\alpha} = \frac{b'^3}{a'b} = \frac{(a^2 + b^2 - a'^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Der Osculationskreis ist also identisch mit dem Krümmungskreise.

Wenn N den zwischen dem Punkte i und der großen Axe liegenden Theil der Normale und β den Winkel bezeichnet, welchen diese mit dem vom Punkte i nach dem Brennpunkte gehenden Vector macht, so ist:

$$N = \frac{b}{a}(a^2+b^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ also } r = \frac{N^3 a^2}{b^4} = \frac{N^3}{p^2},$$

und vermöge des Lehrſatzes 7 in §. 148:

$$r = \frac{N}{\cos^2 \beta}.$$

Aus dieſem letzten Ausdrucke ergibt ſich eine ſehr einfache Conſtruktion des Mittelpunktes des Oseulationskreiſes. — In dem Punkte q (Fig. 189), wo die Normale die erſte Are ſchneidet, errichte man ein Perpendikel qq' auf dieſer Normale, und in dem Punkte q', wo daſſelbe den nach dem Brennpunkte gehenden Vector iF trifft, errichte man ein Perpendikel q'q''; ſo iſt der Punkt q'', wo daſſelbe die Normale durchſchneidet, der Mittelpunkt des Oseulationskreiſes.

Siebenundzwanzigſtes Kapitel.

Conſtruction von Kegelſchnitten nach gewiſſen Bedingungen.

§. 190.

Zur Beſtimmung eines Kegelſchnittes ſind fünf Bedingungen erforderlich, und das allgemeine Problem: Einen durch n gegebene Punkte gehenden und 5—n gegebene Gerade berührenden Kegelſchnitt zu conſtruiren, bietet mithin ſechs verſchiedene Fälle dar, wovon ſich jedoch drei durch Correlation auf die drei andern zurückführen laſſen. — Denn beſchreibt man in der Conſtructionsebene einen beliebigen Kreis, welcher als Richtlinie dient, und conſtruirt die Polaren der gegebenen Punkte, ſo wie die Pole der Tangenten; ſo iſt der Kegelſchnitt S', welcher dieſe n Polaren berührt und durch dieſe 5—n Pole geht, die reciproke Polare des gegebenen Kegelſchnittes S. — Weiß man nun S', oder wenigſtens eine beliebige Anzahl von Punkten und Tangenten von S' zu conſtruiren; ſo geben die Polaren dieſer Punkte und die Pole dieſer Tangenten eine gleiche Anzahl von Punkten und Tangenten von S, ſo daß man den Mittelpunkt, die Are, ꝛc. beſtimmen kann. — Allein, ſtatt die correlative Curve S' zu Hülfe zu nehmen, was ſehr weitläufig ſein würde, iſt es beſſer, S direkt zu conſtrui-

ren, und dieſe direkte Conſtruction kann mit Hülfe von Sätzen geſchehen, welche die correlativen von denen ſind, worauf die Conſtruktion von S′ beruhen würde.

Die beiden Fälle, wo 5 Punkte, oder 5 Tangenten gegeben ſind, ſind ſchon früher (§. 143) vorgekommen, ſo daß wir nur noch die 4 übrigen Fälle zu unterſuchen haben.

§. 191.

Conſtruction eines Kegelſchnittes, welcher durch vier gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Bekanntlich ſchneidet eine beliebige Sekante einen Kegelſchnitt und die Gegenſeiten des in denſelben beſchriebenen Viereckes in 6 Punkten, welche eine Involution bilden (§. 166), und wenn die Sekante Tangente wird, ſo hat man eine Involution von 5 Punkten, indem der Berührungspunkt für zwei Punkte gilt. — Man legt alſo durch die gegebenen Punkte ein Viereck, deſſen Gegenſeiten die Tangente in a und a′, b und b′ ſchneiden und beſtimmt die doppelten Involutionspunkte für dieſe 4 Punkte (§. 162), wovon jeder als Berührungspunkt dienen kann, ſo daß die Aufgabe auf die Conſtruction eines durch 5 Punkte gehenden Kegelſchnittes zurückgeführt iſt.

§. 192.

Conſtruction eines Kegelſchnittes, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und 4 gegebene Gerade berührt.

Wenn man von einem Punkte der Ebene Tangenten an einen Kegelſchnitt und Gerade nach den gegenüberliegenden Ecken eines um denſelben beſchriebenen Viereckes zieht; ſo erhält man ein Büſchel von 6 Geraden, welche eine Involution bilden. — Wenn der Punkt auf dem Kegelſchnitte liegt, ſo fallen die beiden Tangenten zuſammen, und man hat eine Involution von 5 Geraden. — Man verbindet alſo den gegebenen Punkt mit den gegenüberliegenden Ecken des von den 4 Tangenten gebildeten Viereckes, ſo beſtimmen die Verbindungslinien auf einer beliebigen Sekante die Punkte a und a′, b und b′, wozu man die doppelten Involutionspunkte ſucht. Die Gerade, welche einen derſelben mit dem gegebenen Punkte verbindet, kann als Tangente an dem Kegelſchnitte in dieſem Punkte dienen, ſo daß die Aufgabe auf die Conſtruction eines fünf gegebene Gerade berührenden Kegelſchnittes zurückgeführt iſt.

§. 193.

Conſtruction eines Kegelſchnittes, welcher durch 3 gegebene Punkte a, b, c geht und 2 gegebene Gerade berührt.

Die Aufgabe iſt nur möglich, wenn alle drei gegebenen Punkte in demſelben von den Tangenten gebildeten Winkel, oder in ſeinem Scheitelwinkel liegen. — Wenn dieſe Bedingung erfüllt wird, ſo beſchreibt man in dem gedachten Winkel einen Kreis S′, welcher die beiden gegebenen Geraden berührt und die homologiſche Curve des geſuchten Kegelſchnittes S iſt, während der Durchſchnittspunkt o der beiden Tangenten der Mittelpunkt der Homologie iſt. — Hierauf kann man leicht die Are der Homologie (§. 172) und beliebig viele Punkte und Tangenten von S conſtruiren. Denn jeder der Radien oa, ob, oc trifft den Kreis in zwei Punkten, wodurch 8 verſchiedene Dreiecke entſtehen, wovon jedes als homologiſches von abc genommen werden kann. Man erhält alſo 8 Aren der Homologie; aber ſie geben nur 4 verſchiedene Auflöſungen.

§. 194.

Conſtruction eines Kegelſchnittes, welcher durch zwei gegebene Punkte a, b geht und drei gegebene Gerade C, D, E berührt.

Die beiden Punkte müſſen in Bezug auf jedes Tangentenpaar in demſelben Winkel, oder in dem Scheitelwinkel deſſelben liegen. Wenn dieſe Bedingungen erfüllt werden, ſo beſchreibt man in dem gehörigen Winkel einen Kreis S′, welcher die Geraden D, E berührt, und die homologiſche Curve des geſuchten Kegelſchnittes S iſt, während der Durchſchnittspunkt o der gemeinſchaftlichen Tangenten der Mittelpunkt der Homologie iſt. Die Radien oa, ob treffen den Kreis reſp. in a′, b′ und ab ſchneidet C in einem Punkte c, deſſen homologiſcher Punkt c′ mittelſt des Durchſchnittes von oc, a′b′ beſtimmt wird. Aus c ziehe man eine Tangente C′ an den Kreis, ſo iſt dieſelbe die homologiſche Gerade von C, und die Durchſchnitte von ab, a′b′ und C, C′ geben zwei Punkte der Are, ſo daß man 8 Aren der Homologie, aber nur 4 Auflöſungen erhält.

§. 195.

Bemerkung über die Hyperbel.

Die Richtung einer Aſymptote iſt gleichgeltend einem Punkte, weil ein Punkt der Hyperbel auf der Aſymptotenrichtung in unend-

licher Entfernung liegt, wonach ſich die vorhergehenden Conſtructionen leicht modificiren laſſen.

a) Eine Hyperbel zu conſtruiren, welche durch 4 gegebene Punkte a, b, c, d geht, wenn zugleich die Richtung einer Aſymptote gegeben iſt. — Man bilde das Viereck abcd, und durch die Punkte a, d ziehe man zwei Parallelen zu der gegebenen Aſymptotenrichtung; ſo erhält man ein eingeſchriebenes Fünfeck, deſſen eine Ecke in unendlicher Entfernung liegt. Die gewöhnliche Conſtruction (§. 143) beſtimmt die Tangenten in den gegebenen Punkten und die Lage der zu der gegebenen Richtung parallelen Aſymptote.

b) Eine Hyperbel zu conſtruiren, wenn 3 Punkte a, b, c derſelben und die Richtungen der beiden Aſymptoten gegeben ſind. — Durch a ziehe man eine Parallele zu der einen, und durch c eine Parallele zu der andern Aſymptotenrichtung, ſo liegen auf dieſen Parallelen zwei Punkte d, e der Hyperbel in unendlicher Entfernung, und man hat ein eingeſchriebenes Fünfeck, wovon eine Seite in unendlicher Entfernung liegt.

§. 196.

Conſtruction einer Parabel, welche durch 4 gegebene Punkte geht.

Es ſei $a_1 a a' a'' a''' a_2$ ein in die Parabel beſchriebenes Sechseck, und wir wollen annehmen, daß ſich die beiden Punkte a_1, a_2 ins Unendliche entfernen; ſo werden die Geraden aa_1 und $a'''a_2$ zu der Axe parallel, und der Durchſchnittspunkt von $a'a''$, a_1a_2 entfernt ſich auf $a'a''$ ins Unendliche. — Wenn man alſo durch die Ecken a und a''' eines eingeſchriebenen Viereckes $aa'a''a'''$ (Fig. 190) Parallelen zur Axe zieht, welche die Seiten $a''a'''$ und aa' in c und b ſchneiden; ſo iſt die Gerade bc zu $a'a''$ parallel. Nimmt man die Entfernung ob zur Unbekannten, ſo geben die ähnlichen Dreiecke:

$$ob : oa' = oc : oa'',$$
$$ob : oa''' = oa : oc,$$

woraus folgt:

$$\overline{ob}^2 = \frac{oa \cdot oa' \cdot oa'''}{oa''}.$$

Man kennt alſo die Richtung der Axe und 3 Punkte der Parabel, ſo daß die Aufgabe auf eine bereits gelöſ'te zurückgeführt iſt. —

Uebrigens ist die Aufgabe nur möglich, wenn die 4 gegebenen Punkte ein convexes Viereck bilden, und in diesem Falle gibt es zwei Auflösungen.

§. 197.

Construction einer Parabel, welche 3 gegebene Gerade berühret und durch einen gegebenen Punkt geht.

Wir wollen das von 5 Tangenten A, A′, A″, A‴, A⁗ (Fig. 191) einer Parabel gebildete Fünfeck aa′a″a‴a⁗ betrachten, und es sei b der Berührungspunkt von A⁗; so schneiden sich die drei Geraden aa‴, a′b, a″a⁗ bekanntlich in demselben Punkte. Wenn sich nun der Berührungspunkt von A ins Unendliche entfernt, so entfernen sich die Punkte a, a⁗ auf A, A⁗ ebenfalls ins Unendliche. — Wenn man also in irgend einem um die Parabel beschriebenen Vierecke durch die Ecken a″, a‴ Parallelen zu den Seiten A⁗, A′ zieht, und die Ecke a′ mit dem Berührungspunkte b der Seite A⁗ verbindet; so erhält man drei durch denselben Punkt gehende Gerade. — Sind nun A′, A″, A‴, die drei Tangenten und b der gegebene Punkt, so verlängere man a′b bis zum Durchschneiden mit A‴, und wenn man ia‴ zur Unbekannten nimmt; so geben die ähnlichen Dreiecke:

$$ia''' : id = io : ia',$$
$$ia''' : ia'' = ib : io,$$

woraus folgt:

$$\overline{ia'''}^2 = \frac{ia'' \,.\, ib \,.\, id}{ia'}.$$

Soll die Aufgabe möglich sein, so muß der Punkt b außerhalb des von den drei Tangenten gebildeten Dreieckes liegen, und alsdann gibt es zwei Auflösungen.

§. 198.

Construction einer Parabel, welche durch drei gegebene Punkte a, a′, a″ geht und eine gegebene Gerade A berührt.

Es sei B der zu der Tangente conjugirte Durchmesser, und man ziehe die Sehnen aa′, a′a″, welche A in c und c′, B in b und b′ schneiden; so ist bekanntlich (§. 185):

$$\overline{cb}^2 = ca \,.\, ca' \text{ und } \overline{c'b'}^2 = c'a' \,.\, c'a''.$$

Man kann also die Punkte b, b′, und folglich die Richtung der Axe, so wie den Berührungspunkt bestimmen.

Da die Längen cb, c'b' auf der einen, oder andern Seite von der Tangente aus genommen werden können, ſo gibt es 4 Combinationen für die Gerade B, und mithin 4 Auflöſungen; jedoch müßen die drei Punkte a, a', a'' auf derſelben Seite der Tangente liegen.

§. 199.

Conſtruction einer Parabel, welche zwei gegebene Gerade A, A' berührt und durch zwei gegebene Punkte a, a' geht.

Es ſei $a_1aa'a_2$ (Fig. 192) ein in eine Parabel beſchriebenes Viereck, und wir wollen die Tangenten A, A' in den Punkten a, a' ziehen; ſo liegen die Durchſchnittspunkte der Geraden aa_1 und A', aa' und a_1a_2, $a'a_2$ und A in gerader Linie. — Entfernen ſich nun die Punkte a_1, a_2 ins Unendliche, ſo werden die Geraden aa_1, $a'a_2$ zu der Are parallel und der Durchſchnittspunkt von a_1a_2, aa' entfernt ſich auch ins Unendliche. — Wenn man alſo durch die Berührungspunkte d, d' zweier Tangenten einer Parabel die Geraden de, d'c' zu der Are parallel zieht, ſo iſt die Figur dee'd' ein Parallelogramm. — Verlängert man die Sehne aa', ſo gibt die im vorhergehenden §. erwähnte Eigenſchaft einen Punkt b, b' jeder der Geraden de, d'e'. Nimmt man $oc_1 = oc$, $co'_1 = oc'$, ſo iſt $c_1c'_1$ parallel zu cc', und es iſt $c_1b_1 = cb$, $c'_1b'_1 = c'b'$. Man kennt alſo zwei Punkte jeder der Geraden de, d'e', und mithin iſt die Aufgabe gelöſ't. — Da man die Punkte b, b' zu beiden Seiten jeder Tangente nehmen kann, ſo gibt es 4 Auflöſungen; jedoch müſſen die beiden gegebenen Punkte in demſelben von den Tangenten gebildeten Winkel liegen.

Anhang.

Grundbegriffe der Theorie der abgeleiteten Funktionen.

1) Eine Größe, welche ſo gedacht wird, daß ſie ſucceſſive verſchiedene Werthe annehmen ſoll, heißt eine veränderliche Größe (Veränderliche), wogegen eine Größe, welche als denſelben Werth behaltend gedacht wird, eine conſtante Größe (Conſtante) genannt wird.

2) Eine veränderliche Größe oder Zahl, welche ſo gedacht wird, daß ſie größer werden ſoll und kann, als jede gegebene oder angebbare, noch ſo große Größe oder Zahl, heißt unendlich groß, und wird der Kürze wegen gewöhnlich mit ∞ bezeichnet.

3) Wenn eine Veränderliche ſo beſchaffen iſt, oder ſo gedacht wird, daß ſie, indem ſie von einem reellen Werthe a zu einem andern reellen Werthe b übergeht, alle zwiſchen a und b liegende Werthe durchläuft; ſo heißt ſie eine ſtetige (continuirliche) Veränderliche. — Die Veränderlichen werden gewöhnlich mit den letzten Buchſtaben . . . x, y, z des Alphabetes und die Conſtanten mit den erſten a, b, c, ... bezeichnet.

4) Eine ſtetige Veränderliche, deren Veränderung nicht von der einer andern Veränderlichen abhängt, oder welche unmittelbar und zuerſt als veränderlich gedacht wird, heißt die urſprüngliche, abſolute oder unabhängige Veränderliche. — Eine ſolche iſt z. B. bei Parallelcoordinaten die Abſciſſe x, und bei Polar-Coordinaten der Winkel ϑ.

5) Eine ſtetige Veränderliche dagegen, deren Veränderung, alſo auch deren Werths- oder Größenzuſtände von denen einer andern, als urſprüngliche oder unabhängige Veränderliche gedacht, abhängig ſind, heißt eine abhängige oder relative Veränderliche. — Eine ſolche iſt z. B. die Ordinate y bei geradlinigen Coordinaten, und der Radiusvector ρ bei Polarcoordinaten.

6) Eine ſolche abhängige Veränderliche y wird auch eine

Funktion der unabhängigen Veränderlichen x genannt. — Es ist also die Ordinate y eine Funktion der Abscisse x, und der Vector ρ eine Funktion des Winkels ϑ. — Ueberhaupt ist jeder Ausdruck mit der unabhängigen Veränderlichen x und etwaigen Constanten a, b, c . . . eine Funktion von x.

Um eine noch unbekannte oder eine unbestimmte Funktion y von x zu bezeichnen, schreibt man:

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x),\ y = \psi(x),\ y = \chi(x),\ \text{ꝛc.}$$

wo die verschiedenen Buchstaben f, F, φ, ψ, χ, ... auch verschiedene Funktionen von x bezeichnen, d. h. solche, die auf verschiedene Weise aus x und etwaigen Constanten zusammengesetzt sind, also eine verschiedene Form haben. — Dagegen bezeichnen f(x) und f(z) zwei Funktionen von derselben Form, und welche sich nur dadurch unterscheiden: daß in der zweiten überall z steht, wo in der ersten x steht. — Ebenso unterscheidet sich f(x+h) von f(x) nur dadurch, daß stets x+h für x gesetzt ist. — Ist z. B.

$$f(x) = x^n + \log x - 4x^2 + 5, \text{ so ist } f(x+h) = (x+h)^n + \log(x+h) - 4(x+h)^2 + 5.$$

7) Wenn die Funktion $y = f(x)$ gegeben, oder f(x) ein Ausdruck mit x und etwaigen Constanten ist, so heißt y eine entwickelte (explicite) Funktion von x. Solche explicite Funktionen sind z. B.

$$y = \log x + \sqrt{1 - ax^2},\ y = a^x + bx^n + m \sin x, \text{ ꝛc.}$$

8) Ist dagegen y mit x und etwaigen Constanten in einer Gleichung verbunden, welche erst aufgelöst werden muß, wenn man y als explicite Funktion von x haben will; so wird y eine unentwickelte (implicite) Funktion von x genannt. — Z. B.

$$y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0, \text{ ꝛc.}$$

9) Die expliciten Funktionen werden in algebraische und transcendente eingetheilt. — Erstere sind solche, worin nur Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen, so wie Potenzen und Wurzeln bestimmter Grade vorkommen, und zu den letztern gehören alle übrigen, z. B. die Exponentialfunktion a^x, die logarithmische Funktion log x, die Kreisfunktionen sin x, cos x, tang x, ꝛc.

10) Eine explicite algebraische Funktion heißt ganz, gebrochen, rational, oder irrational, jenachdem x nicht in

einem Nenner, oder in einem ſolchen, nicht unter einem Wurzelzeichen, oder unter einem ſolchen vorkommt. — Die allgemeine Form einer ganzen algebraiſchen Funktion y iſt:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

Sie heißt vom erſten, zweiten, dritten, ... Grade, jenachdem der höchſte Exponent von x reſp. 1, 2, 3, ... iſt. — Die Funktion vom erſten Grade $y = A_0 + A_1 x$ wird auch lineare Funktion genannt, weil ſie die Ordinate y einer Geraden ausdrückt.

11) Wenn $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, alſo $y = f(\varphi(x))$ iſt, ſo heißt y eine mittelbare oder wiederholte Funktion von x. — Z. B.

$$y = z^n,\ z = \log x, \text{ alſo } y = (\log x)^n,\ y = \sin z,\ z = \sqrt{a + bx},$$
$$\text{alſo } y = \sin\left(\sqrt{a + bx}\right), \text{ ꝛc.}$$

12) Wenn man aus der Gleichung $y = f(x)$ den Werth von x ſucht, und $x = \psi(y)$ findet, ſo wird dieſe letzte Funktion die inverſe der erſten genannt. — Die inverſen Funktionen von:

$$y = x^n, \quad y = a^x, \quad y = \sin x, \ldots,$$

ſind z. B.

$$x = \sqrt[n]{y}, \quad x = \overset{a}{\log} y, \quad x = \operatorname{arc}\sin x, \ldots$$

13) Eine Funktion $f(x)$ heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ iſt, und ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ iſt.

14) Periodiſch wird eine Funktion $f(x)$ genannt, wenn $f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = f(x+3p) = \ldots$ iſt. — Es ſind folglich z. B. $\sin x$, $\cos x$, ... periodiſche Funktionen, weil bekanntlich iſt:

$$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \sin(x+6\pi) = \ldots$$
$$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi)\ \cos(x+6\pi) = \ldots$$

15) Eine nicht periodiſche Funktion nimmt mit x entweder gleichzeitig ins Unendliche zu, oder ab, oder ſie iſt bei ihrer beſtändigen Zu- oder Abnahme an eine endliche Grenze gebunden, welche ſie nicht überſchreiten kann, oder endlich, ſie nimmt abwechſelnd zu und ab; aber nicht nach regelmäßigen Perioden, wenn x ins Unendliche zu- oder abnimmt. — Z. B. die Funktion $f(x) = x^2$ nimmt von o bis $+\infty$ zu, wenn x von o bis $\pm\infty$ zu- oder abnimmt. Die Funktion $f(x) = x^3 + 1$ ändert ſich von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x ſich von $-\infty$ bis $+\infty$ ändert. Wenn x gegen o conver-

girt, so nähert sich die Funktion $f(x) = \frac{a}{b+x}$ zunehmend der Grenze $\frac{a}{b}$, und wenn x gegen ∞ convergirt; so nähert sich f(x) abnehmend der Grenze Null.

Das allgemeine Gesetz, nach welchem sich eine stetige Funktion $y = f(x)$ ändert, wenn sich die unabhängige Veränderliche x stetig ändert, wird durch die Grenze des Verhältnisses der gleichzeitigen, zusammengehörigen Veränderungen k und h der Funktion und der unabhängigen Veränderlichen x, d. h. durch:

$$\text{Gr. } \frac{k}{h} = \text{Gr. } \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ausgedrückt, wenn h und folglich auch k sich ohne Ende der Grenze Null nähert.

Wenn $y = f(x) = ax + b$, d. h. eine algebraische ganze Funktion des ersten Grades ist, so ist:

$$\text{Gr. } \frac{k}{h} = a,$$

d. h. eine Constante, was auch geometrisch einleuchtet, weil $y = ax + b$ eine gerade Linie ausdrückt, deren constanter Richtungscoefficient a ist.

Wenn $y = f(x)$ keine ganze algebraische Funktion ist, so ist die durch diese Gleichung ausgedrückte Linie keine gerade mehr, sondern irgend eine Curve, deren Richtungscoefficient allgemein wieder durch $\text{Gr. } \frac{k}{h} = \text{Gr. } \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ausgedrückt wird (§. 55); und da sich die Richtung einer Curve für die verschiedenen Werthe von x ändert, so muß dies auch mit dem Richtungscoefficienten $\text{Gr. } \frac{k}{h} = I$ der Fall sein; d. h. es muß $\text{Gr. } \frac{k}{h}$ eine gewisse Funktion von x sein, welche gewöhnlich mit $f'(x)$ bzeichnet und die abgeleitete Funktion oder kurzweg die Ableitung von $y = f(x)$ genannt wird.

Diese abgeleitete Funktion $f'(x)$ spielt, wie man in dem Frühern gesehen hat, in der analytischen oder Coordinatengeometrie eine wichtige Rolle, weshalb die Grundzüge der Theorie der abgeleiteten Funktionen, so weit dies zum Verständniß des Frühern nöthig ist, noch erörtert werden sollen.

16) Wenn $f(x) = \varphi(x)$ für jeden Werth von x ist, so ist auch:

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x), \text{ also:}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}, \text{ und:}$$

$$\text{Gr.} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{Gr.} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

d. h.:

$$f'(x) = \varphi'(x). \qquad (1)$$

Wie wird der hierin liegende Satz in Worten ausgesprochen?

17) Wenn $f(x) = \varphi(x) + A$ ist, wo A eine Constante bezeichnet, so ist auch:

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) + A - [\varphi(x) + A] = \varphi(x+h) - \varphi(x);$$

also:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

und:

$$\text{Gr.} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{Gr.} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

d. h.:

$$f'(x) = \varphi'(x). \qquad (2)$$

Wie lautet der hierin liegende Satz in Worten?

18) Wenn $f(x) = A \cdot \varphi(x)$ ist, wo A eine Constante bedeutet, so ist:

$$f(x+h) - f(x) = A[\varphi(x+h) - \varphi(x)],$$

mithin:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A \cdot \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

und:

$$\text{Gr.} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A \cdot \text{Gr.} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

d. h.:

$$f'(x) = A \cdot \varphi'(x). \qquad (3)$$

Wie lautet der in dieser letzten Gleichheit liegende Lehrsatz?

19) Wenn $f(x) = \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \chi(x) \pm \ldots$ ist, so ist auch:

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) \pm [\psi(x+h) - \psi(x)] \pm [\chi(x+h) - \chi(x)] \pm \ldots$$

und:

$$\text{Gr.}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{Gr.}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\pm\text{Gr.}\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}$$
$$\pm\text{Gr.}\frac{\chi(x+h)-\chi(x)}{h}\pm\ldots$$

d. h.:

$$f'(x)=\varphi'(x)\pm\psi'(x)\pm\chi'(x)\pm\ldots. \qquad (4)$$

Wie lautet der in dieſer letzten Gleichheit liegende Satz?

20) Wenn $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ iſt, ſo iſt auch:

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(x+h)\cdot\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x)$$
$$=\left[\varphi(x+h)-\varphi(x)\right]\psi(x+h)+\left[\psi(x+h)-\psi(x)\right]\varphi(x),$$

alſo:

$$\text{Gr.}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{Gr.}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\psi(x+h)$$
$$+\text{Gr.}\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}\varphi(x),$$

d. h.:

$$f'(x)=\varphi'(x)\psi(x)+\psi'(x)\varphi(x). \qquad (5)$$

Wie lautet die in dieſer Gleichheit liegende Regel?

Wenn $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)\cdot\chi(x)\ldots$ iſt, ſo findet man nach (5) leicht:

$$f'(x)=\varphi'(x)\cdot\psi(x)\cdot\chi(x)\ldots+\psi'(x)\varphi(x)\chi(x\ldots.$$
$$+\chi'(x)\cdot\varphi(x)\psi(x)\ldots+\ldots. \qquad (6)$$

Iſt $\varphi(x)=\psi(x)=\chi(x)=\ldots$ und die Anzahl der Factoren $=n$, alſo $f(x)=\left[\varphi(x)\right]^n$; ſo wird (6):

$$f'(x)=n\left[\varphi(x)\right]^{n-1}\varphi'(x). \qquad (7)$$

Welche Regel liegt in (7)?

21) Wenn $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ iſt, ſo iſt auch:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)}-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\psi(x)\varphi(x+h)-\varphi(x)\psi(x+h)}{\psi(x)\psi(x+h)}$$
$$=\frac{\psi(x)\left[\varphi(x+h)-\varphi(x)\right]-\varphi(x)\left[\psi(x+h)-\psi(x)\right]}{\psi(x)\psi(x+h)},$$

alſo:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\psi(x)\cdot\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\varphi(x)\cdot\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}}{\psi(x)\psi(x+h)},$$

und wenn man zur Grenze übergeht:

$$f'(x)=\frac{\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\left[\psi(x)\right]^2}. \qquad (8)$$

Wie lautet die in dieſer letzten Gleichheit liegende Regel?

Wenn $\varphi(x) = A$ iſt, wo A eine Conſtante bedeutet, ſo geht (8) wegen $\varphi'(x) = 0$ über in:

$$f'(x) = -\frac{A\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}. \qquad (9)$$

22) Wenn $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$, alſo $y = f[\varphi(x)]$ iſt 11) und es bedeuten k, l, h reſp. die Zunahmen von y, z, x; ſo hat man:

$k = f(z+l) - f(z)$, $l = \varphi(x+h) - \varphi(x)$, alſo:

$$\frac{k}{h} = \frac{f(z+l)-f(z)}{l} \cdot \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}, \text{ und mithin:}$$

$$y' = \text{Gr.}\frac{k}{h} = f'(z) \cdot \varphi'(x). \qquad (10)$$

Wie ſpricht ſich die in (10) liegende Regel in Worten aus?

23) Wenn $y = f(x)$ und umgekehrt $x = \varphi(y)$ iſt, ſo hat man:

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ alſo } \frac{h}{k} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \text{ und}$$

$$\frac{h}{k} = \frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k};$$

alſo:

$$\text{Gr.}\frac{h}{k} = \frac{1}{f'(x)} = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}. \qquad (11)$$

Wie lautet die in (11) ausgedrückte Regel für die Herleitung der Ableitung $\varphi'(y)$ der inverſen Funktion $\varphi(y)$ aus der der direkten Funktion $f(x)$?

24) Es ſei $y = x^n$, wo n eine ganze poſitive Zahl bedeutet; ſo hat man:

$$k = (x+h)^n - x^n = (x+h)(x+h)(x+h)\ldots - x^n$$
$$= nx^{n-1}h + Ph^2 + Qh^3 + \ldots.$$

alſo:

$$\text{Gr.}\frac{k}{h} = nx^{n-1}. \qquad (12).$$

Wie lautet die in der Gleichheit (12) liegende Regel?

Es ſei $f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots.$, ſo iſt nach (2), (4) und (12):

$$f'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots.$$

Es sei $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, so erhält man nach (9), wenn man $\psi(x) = x^n$ und $A = 1$ setzt:

$$f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

Es sei $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, so ist $\left[f(x)\right]^n = x^m$, u. nach (1), (7) u. (12):

$$n\left[f(x)\right]^{n-1} f'(x) = mx^{m-1},$$

also:

$$f'(x) = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{[f(x)]^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{\frac{x^m}{f(x)}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{f(x)}{x} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}. \quad (\mu)$$

Endlich sei $f(x) = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, so ist nach (9) und ($\mu$), wenn $\psi(x) = x^{\frac{m}{n}}$ und $A = 1$ gesetzt wird:

$$f'(x) = -\frac{\frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}}{x^{2 \cdot \frac{m}{n}}} = -\frac{m}{n} \cdot x^{-\frac{m}{n}-1}.$$

Die Gleichheit (12) findet also immer statt, der Exponent n mag ganz, oder gebrochen, positiv, oder negativ sein, wenn x positiv ist.

25) Es sei $f(x) = \log x$, wo x positiv ist, so hat man:

$$f(x+h) - f(x) = \log(x+h) - \log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

folglich:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \text{ wenn } \frac{h}{x} = \frac{1}{m} \text{ gesetzt wird.}$$

Läßt man nun h gegen Null convergiren, so convergirt m gegen ∞. Da aber Gr. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ den Richtungscoefficienten I der Tangente der durch die Gleichung $y = f(x) = \log x$ gegebenen Curve ausdrückt 15), welcher im Allgemeinen, d. h. so lange der Werth von x nicht specialisirt wird, eine endliche und bestimmte Größe ist; so muß

auch Gr. $\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ eine ſolche Größe ſein, welche wir mit $\log e$ bezeichnen wollen. Geht man alſo zur Grenze über, ſo hat man endlich:

$$f'(x) = \frac{\log e}{x}. \qquad (13)$$

Wenn $m = \frac{x}{h}$ negativ wäre, ſo hätte man wieder:

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m$$
$$= \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

für $m = \infty$. Für $m = 1000000$ erhält man:

$$e = \left(\frac{1000001}{1000000}\right)^{1000000} = 2{,}71828\ldots$$

Das Geſetz, wonach m ins Unendliche zunimmt, iſt gleichgültig, und man kann ſich m immer als eine ganze Zahl denken.

26) Wenn $y = \log f(x)$ iſt, und man ſetzt einſtweilen $z = f(x)$, ſo daß $y = \log z$ wird; ſo hat man nach (10) und (13):

$$y' = \log e \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad (14)$$

Wie lauten die in (13) und (14) liegenden Regeln?

27) Es ſei $y = f(x) = a^x$, ſo iſt $\log y = \log f(x) = \log a \cdot x$; folglich nach (1) und (14):

$$\log e \cdot \frac{y'}{y} = \log e \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = \log a;$$

mithin:

$$y' = f'(x) = \frac{\log a}{\log e}\, y = \frac{\log a}{\log e}\, f(x) = \frac{\log a}{\log e} \cdot a^x$$
$$= \overset{e}{\log} a \cdot a^x = \frac{a^x}{\overset{a}{\log} e}, \qquad (15)$$

wo $\overset{e}{\log}$, $\overset{a}{\log}$ reſp. Logarithmen in dem Syſteme von der Grundzahl e oder a bedeuten.

Wie lautet die in (15) liegende Regel für die Bildung der Ableitung der Exponentialfunktion a^x?

Wenn $y = f(x) = e^x$ iſt, ſo iſt offenbar:

$$y' = f'(x) = e^x. \qquad (16)$$

28) Iſt $y = a^{f(x)}$ und man ſetzt einſtweilen $z = f(x)$, ſo daß $y = a^z$ wird; ſo hat man nach (10) und (15):

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{\log a}{\log e} \cdot a^{f(x)} f'(x) \\ &= \log a \cdot a^{f(x)} f'(x) \\ &= \frac{1}{\log e} \cdot a^{f(x)} f'(x). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Wie lautet die in (17) liegende Regel?

29) Wenn $y = \sin x$ iſt, ſo iſt nach §. 71, $y' = \cos x$. (18)

30) Wenn $y = \cos x$ iſt, ſo hat man $y' = -\sin x$ (§. 71). (19)

31) Wenn $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ iſt, ſo hat man nach (8), (18) und (19):

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \quad (20)$$

32) Wenn $y = \cot x$ iſt, ſo iſt $y = \frac{\cos x}{\sin x}$; folglich nach (8), (18) und (19):

$$y' = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \quad (21)$$

33) Wenn $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ iſt, ſo hat man nach (9) und (19):

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \,.\, \operatorname{tang} x. \quad (22)$$

34) Wenn $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ iſt, ſo hat man nach (9) und (18):

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x \,.\, \cot x. \quad (23)$$

35) Wenn $y = \sin f(x)$, $y = \cos f(x)$, $y = \operatorname{tang} f(x)$, $y = \cot f(x)$, $y = \sec f(x)$ und $y = \operatorname{cosec} f(x)$ iſt; ſo hat man nach (8), (18), ... (23):

$$y' = \cos f(x) \,.\, f'(x), \quad (24)$$
$$y' = -\sin f(x) \,.\, f'(x), \quad (25)$$
$$y' = (\sec f(x))^2 . f'(x), \quad (26)$$
$$y' = -(\operatorname{cosec} f(x))^2 . f'(x), \quad (27)$$
$$y' = \sec f(x) \operatorname{tang} f(x) \,.\, f'(x) \quad (28)$$
$$y' = -\operatorname{cosec} f(x) \,.\, \cot f(x) \,.\, f'(x), \quad (29)$$

Wie lauten die in den Gleichheiten (18) . . . (29) liegenden Regeln?

36) Wenn $y = \arcsin x$ ist, so ist $x = \sin y$, $\cos y = \sqrt{1-x^2}$; folglich:

$$x' = \cos y = \sqrt{1-x^2},$$

und mithin nach (11):

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (30)$$

37) Wenn $y = \arccos x$ ist, so ist $x = \cos y$, $\sin y = \sqrt{1-x^2}$; folglich:

$$x' = -\sin y = -\sqrt{1-x^2},$$

und nach (11):

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (31)$$

38) Wenn $y = \arctang x$ ist, so ist $x = \tang y$, und folglich:

$$x' = \sec^2 y = 1+x^2, \text{ also: } y' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (32)$$

u. s. f.

29) Wenn y eine unentwickelte (implicite) Funktion von x ist, so daß man zwischen x und y eine Gleichung $f(x,y) = o$ hat, so braucht man diese Gleichung nicht erst für y aufzulösen, um y als entwickelte Funktion von x zu erhalten, und dann die Ableitung y' nach den frühern Regeln zu bestimmen. Denn da die Gleichung $f(x, y) = o$ für jeden Werth von x und den zugehörigen Werth von y stattfinden muß; so ist auch:

$$f(x+h,\ y+k) = o,$$

mithin:

$$f(x+h,\ y+k) - f(x, y) = o,$$

oder:

$$f(x+h,\ y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y) = o,$$

also auch:

$$\frac{f(x+h,\ y+k) - f(x, y+k)}{h} + \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = o,$$

und endlich, wenn man zur Grenze übergeht:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y' = o, \\ \text{woraus folgt:} \\ y' = -\dfrac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\dfrac{f'_x}{f'_y}, \end{array}\right\} \qquad (33)$$

wo f'_x und f'_y resp. die Ableitung von $f(x, y)$ bezeichnen, wenn nur x, oder nur y als veränderlich gedacht wird, und deshalb partielle Ableitungen heißen.

Wie lautet die in (33) liegende Regel für die Bildung der Ableitung einer implicirten Funktion?

Wenn man zwei Gleichungen:

$$f(x, y, t) = o, \quad F(x, y, t) = o$$

hat, so daß x und y Funktionen von t sind; so ergeben sich auf ähnliche Weise wie vorhin sehr leicht die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f'_t + f'_x x' + f'_y y' &= o, \\ F'_t + F'_x x' + F'_y y' &= o, \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

woraus man die Abtheilungen x', y' durch Elimination erhält.

31) Höhere Ableitungen. — Wenn die gegebene Funktion $y = f(x)$ nicht von der Form $y = ax + b$ ist, so ist die Ableitung $y' = f'(x)$ selbst wieder eine Funktion von x, wovon man also ebenfalls die Ableitung $y'' = f''(x)$ suchen kann, welche zu der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ genau in derselben Beziehung steht, wie diese zu der ursprünglichen Funktion $y = f(x)$, und die zweite Ableitung oder die Ableitung der zweiten Ordnung genannt wird. — Ebenso kann man Ableitungen der dritten, vierten, ... Ordnung zu suchen haben, wozu jedoch keine neuen Regeln erfordert werden, weshalb wir hier blos einige Beispiele anführen wollen:

Wenn $y = f(x) = x^n$ ist, so ist (12):

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) = nx^{n-1}, \\ y'' &= f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \\ y''' &= f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Wenn $y = \log x$ ist, so ist (13):

$$y' = \log e \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = -\log e \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$y''' = 1.2.\log e \cdot \frac{1}{x^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Wenn $y = a^x$ iſt, ſo iſt (15):

$$y' = \log_e a \cdot a^x,$$

$$y'' = (\log_e a)^2 \cdot a^x,$$

$$y''' = (\log_e a)^3 \cdot a^x,$$

. . . . . .

Wenn $y = e^x$ iſt, ſo iſt (16):

$$y' = e^x,$$

$$y'' = e^x,$$

$$y''' = e^x,$$

. . . .

Wenn $y = \sin x$ iſt, ſo iſt (18):

$$y' = \cos x,$$

$$y'' = -\sin x,$$

$$y''' = -\cos x,$$

$$y^{IV} = \sin x,$$

. . . . .

Wenn $f(x, y) = y^3 - 3axy + x^3 = o$ iſt, ſo hat man (33):

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax},$$

und hieraus ergibt ſich nach (8), wenn man bemerkt, daß y eine Funktion von x iſt (10):

$$y'' = -\frac{(y^2 - ax)(2x - ay') - (x^2 - ay)(2yy' - a)}{(y^2 - ax)^2}.$$

Setzt man hierin für y' ſeinen obigen Werth und reducirt, ſo erhält man:

$$y'' = -\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3},$$

woraus ſich ebenſo der Werth von y''' ergibt; u. ſ. f.

Man kann aber auch leicht den allgemeinen Ausdruck für y'' erhalten; denn wenn man von (33) nach der Formel (8) die Ableitung ſucht, indem man bemerkt: daß y eine Funktion von x iſt, alſo die Regel (10) beachtet; ſo erhält man:

$$y'' = -\frac{f''_{x^2} + 2f''_{xy}y' + f''_{y^2} \cdot y'^2}{f'_y}. \qquad (35)$$

indem man bemerkt: daß $f''_{xy} = f''_{yx}$ iſt, was ſich leicht allgemein zeigen läßt, d. h. daß es einerlei Reſultat gibt, ob man von $f(x, y)$ zuerſt die Ableitung nach x und dann die nach y, oder

umgekehrt nimmt. — Setzt man in den letzten Ausdruck für y' seinen Werth (33), so bekommt man endlich:

$$y'' = -\frac{f'^2_y f''_{x^2} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{y^2}}{f'^3_y}. \quad (36)$$

Berechnet man das obige Beispiel $f(x,y) = y^3 - 3axy + x^3 = 0$ nach der Formel (36), so hat man:

$$f'_x = 3x^2 - 3ay, \quad f'_y = 3y^2 - 3ax$$
$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{y^2} = 6y,$$
$$f''_{xy} = f''_{yx} = 3a,$$

und wenn man diese Werthe in die Formel (36) setzt; so erhält man wieder:

$$y'' = -\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

32) Reihenentwickelungen von $f(x)$ und $f(x+h)$. — Man setze:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots. \\ \text{so ist auch:} & \\ f'(x) &= A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots. \\ f''(x) &= 2A_2 x + 2.3A_3 x + \ldots. \\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (\mu)$$

Da nun die noch unbestimmten Coefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, ... von x unabhängige Constanten sind, so kann man auch den Werth $x = 0$ zu ihrer Bestimmung benutzen. — Setzt man aber in den Gleichheiten (μ) diesen Werth für x, so ergibt sich:

$$A_0 = f(0),\ A_1 = f'(0),\ A_2 = \frac{f''(0)}{1.2},\ A_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3}, \ldots.$$

Man hat also:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots. \quad (37)$$

Setzt man ferner $f(x) = \varphi(x+h)$, wo h eine Constante bezeichnet; so hat man:

$$f'(x) = \varphi'(x+h),\ f''(x) = \varphi''(x+h),\ f'''(x) = \varphi'''(x), \ldots.$$

folglich:

$$f(0) = \varphi(h),\ f'(0) = \varphi'(h),\ f''(0) = \varphi''(h),\ f'''(0) = \varphi'''(h), \ldots$$

und wenn man diese Werthe von $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... in (37) setzt:

$$\varphi(x+h) = \varphi(h) + \frac{\varphi'(h)}{1}x + \frac{\varphi''(h)}{1.2}x^2 + \frac{\varphi'''(h)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

Da aber $\varphi(x+h)$ offenbar eine *symmetrische* Funktion von x und h ist, deren Werth *nicht* geändert wird, wenn man x und h unter sich *vertauscht*; so darf man diese Vertauschung vornehmen, wodurch man erhält:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{1}{1}\varphi'(x)h + \frac{1}{1.2}\varphi''(x)h^2 + \frac{1}{1.2.3}\varphi'''(x)h^3 + \ldots, \quad (38)$$

oder da das Funktionszeichen gleichgültig ist:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1}f'(x)h + \frac{1}{1.2}f''(x)h^2 + \frac{1}{1.2.3}f'''(x)h^3 + \ldots. \quad (38)$$

Verbesserungen.

Seite 8. Zeile 17 von oben lies o statt o^4.
„ 67. „ 18 „ „ „ Veränderung der Lage.
„ 203 letzte Zeile lies: welche die *Richtcurve* heißt.

Gedruckt bei Gebr. Mäntler.

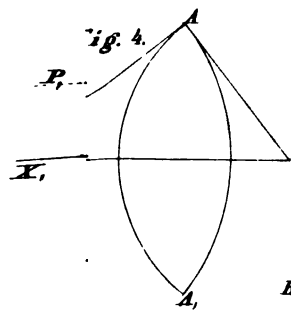


Fig. 4.
A
P,
O,
X,
A,

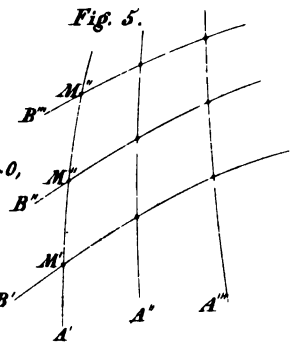


Fig. 5.
M''
B''
M''
B''
M'
B'
A'
A''
A'''

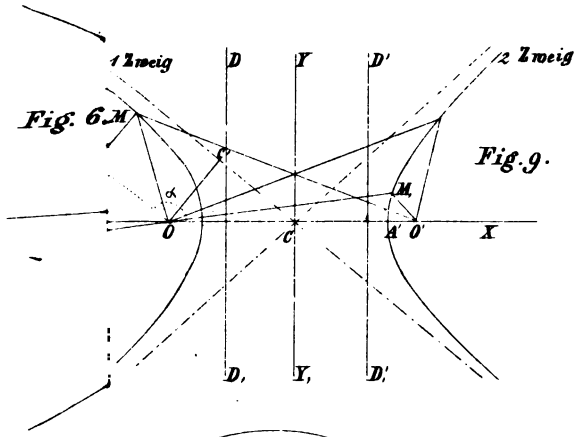

1 Zweig
D
Y
D'
2 Zweig
Fig. 6.
M
α
O
C
M,
A'
O'
X
D,
Y,
D',

Fig. 9.

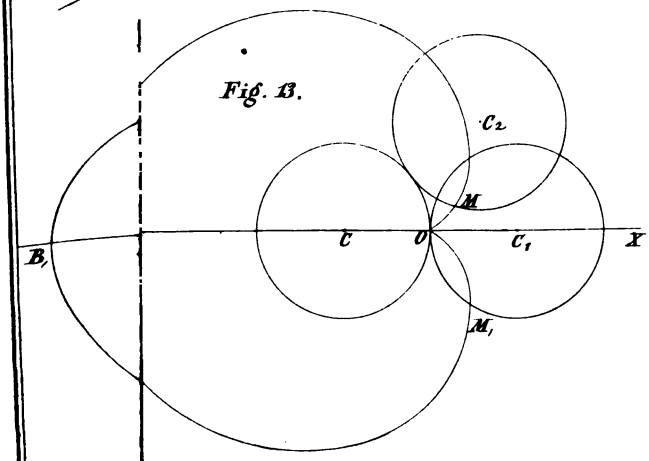


Fig. 13.
C2
M
B,
C
O
C1
X
M,

Da aber $\varphi(x+h)$ offenbar eine ſymmetriſche Funktion von x und h iſt, deren Werth nicht geändert wird, wenn man x und h unter ſich vertauſcht; ſo darf man dieſe Vertauſchung vornehmen, wodurch man erhält:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{1}{1}\varphi'(x)h + \frac{1}{1.2}\varphi''(x)h^2 + \frac{1}{1.2.3}\varphi'''(x)h^3 + \ldots, \quad (38)$$

oder da das Funktionszeichen gleichgültig iſt:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1}f'(x)h + \frac{1}{1.2}f''(x)h^2 + \frac{1}{1.2.3}f'''(x)h^3 + \ldots. \quad (38)$$

Verbeſſerungen.

Seite 8. Zeile 17 von oben lies o ſtatt o^2.
„ 67. „ 18 „ „ „ Veränderung der Lage.
„ 203 letzte Zeile lies: welche die Richtcurve heißt.

Gedruckt bei Gebr. Mäntler.

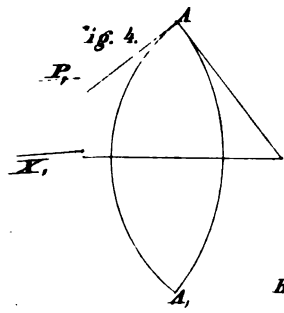


Fig. 4.
A
P,
X,
O,
A,

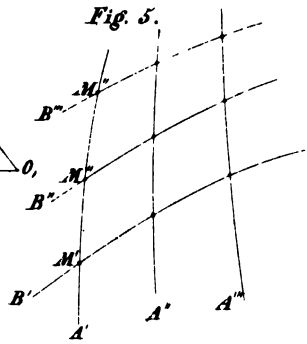


Fig. 5.
M'''
B'''
M''
B''
M'
B'
A'
A''
A'''

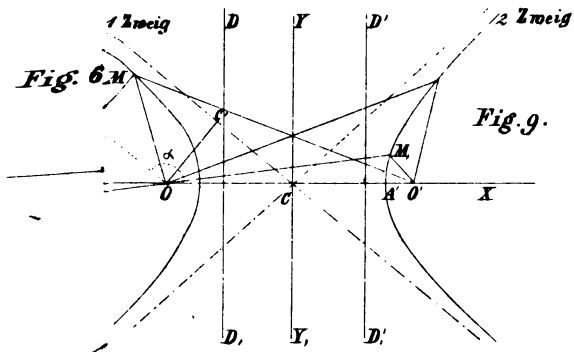

1 Zweig
D
Y
D'
2 Zweig
Fig. 6.
M
C
α
M,
O
C'
A'
O'
X
D,
Y,
D',

Fig. 9.

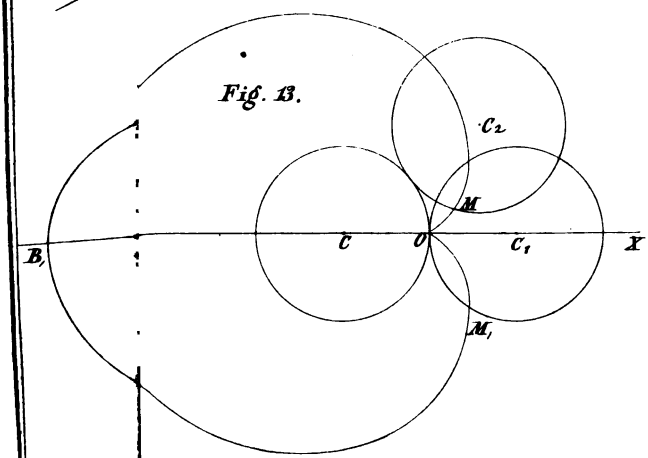


Fig. 13.
C₂
M
B,
C
O
C₁
X
M,

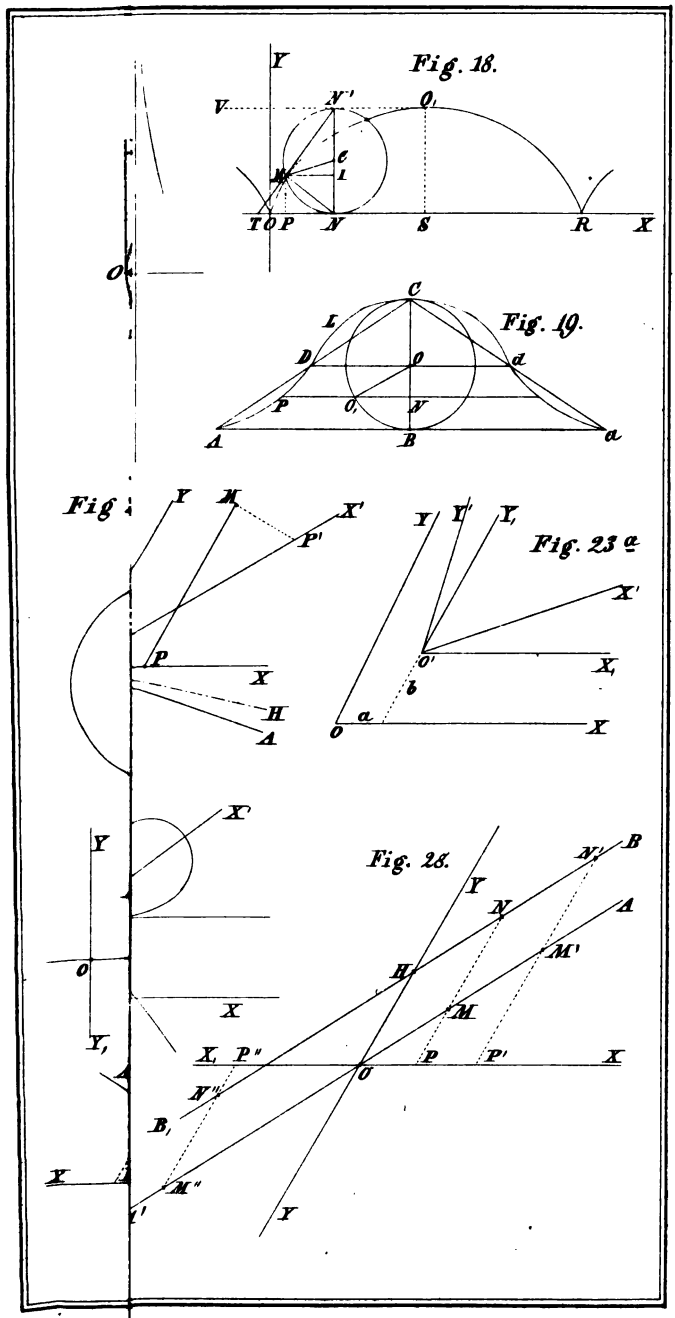


Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 23 a
Fig. 28.

Fig. 36.

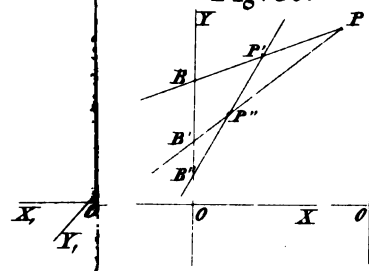


Fig. 37.

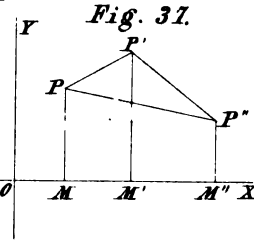


Fig. 42.

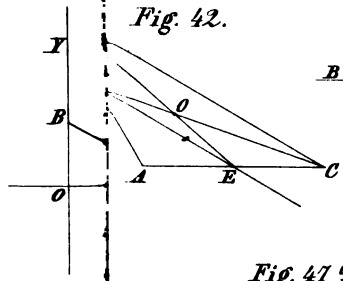


Fig. 43.

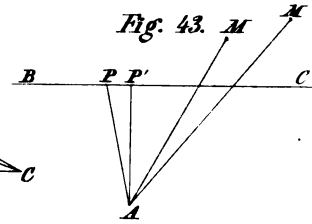


Fig. 47 a.

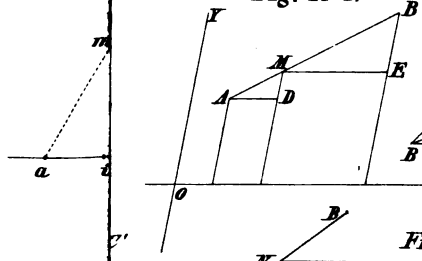


Fig. 47 c.

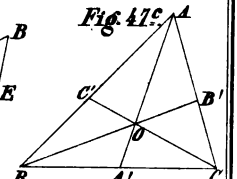
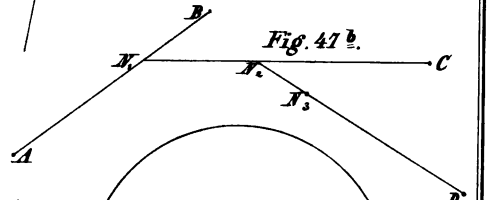


Fig. 47 b.



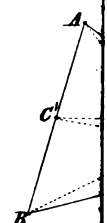
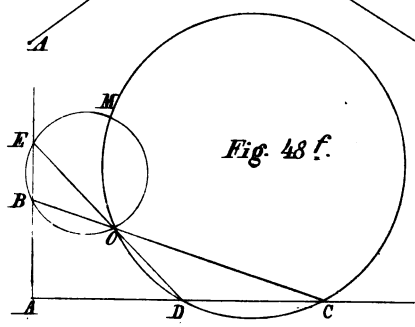


Fig. 48 f.



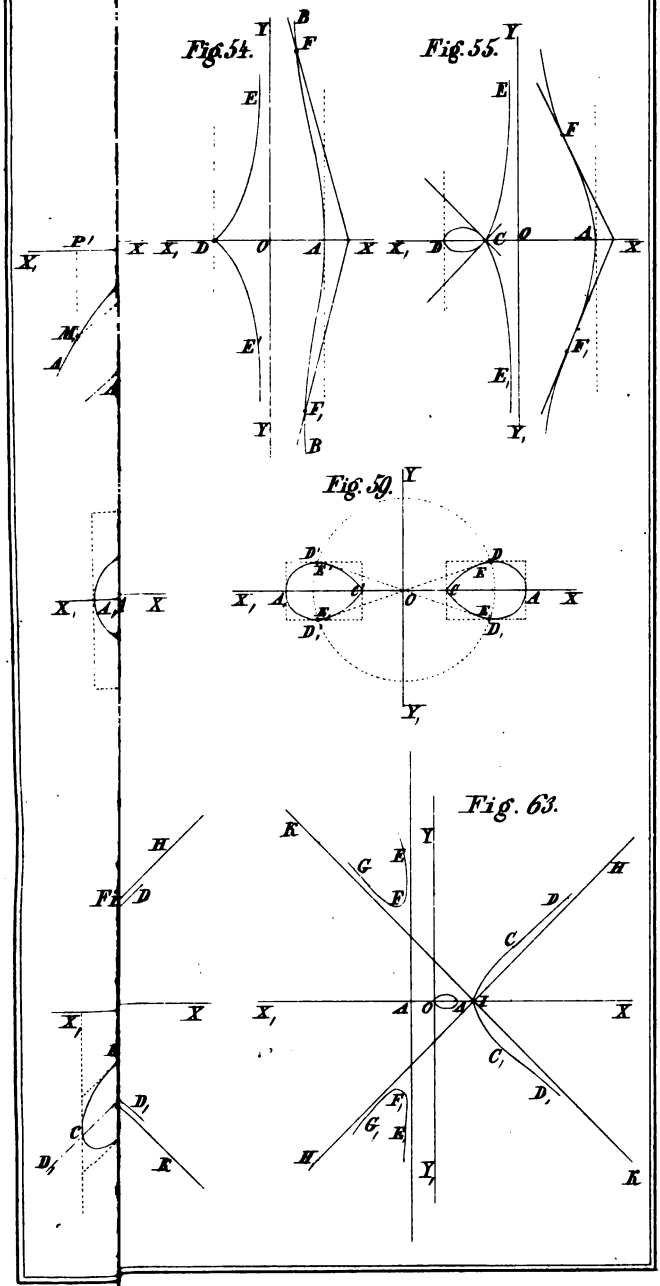


Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 59.
Fig. 63.

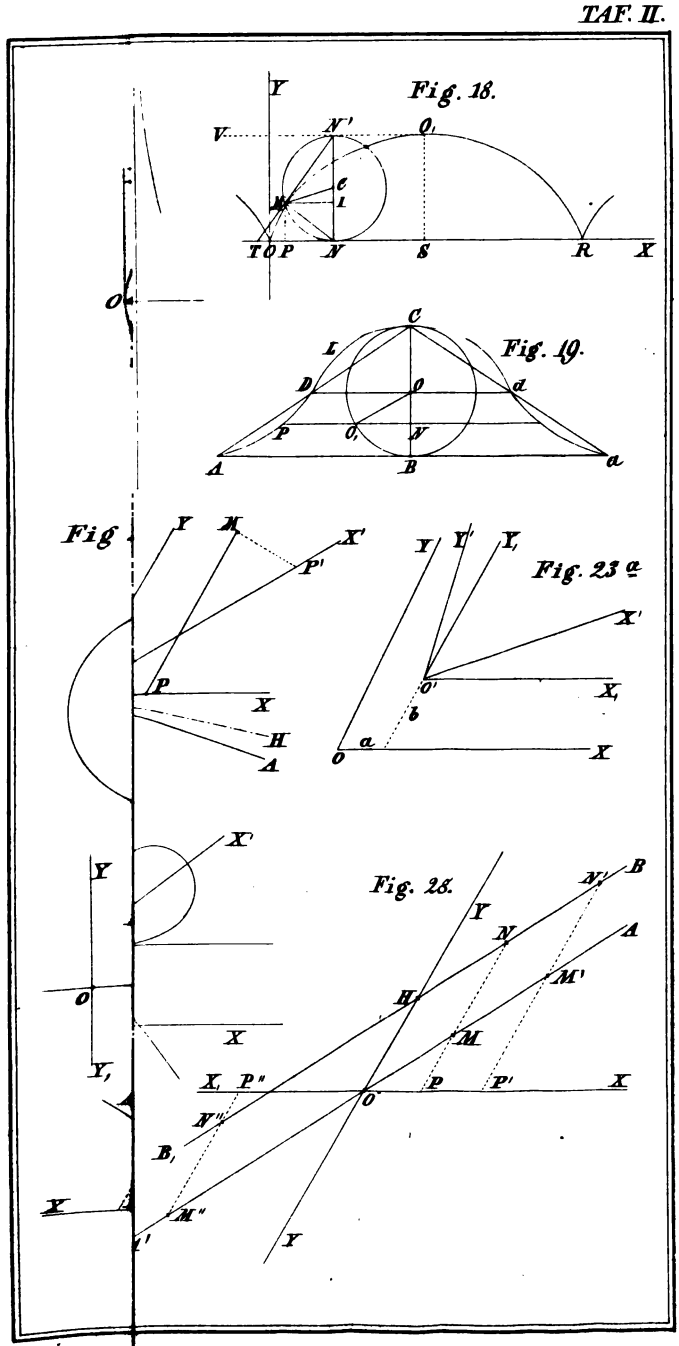


Fig. 18.
Y
V
N'
O,
C
M
1
T O P
N
S
R
X
O
Fig. 19.
C
L
D
O
d
P
O,
N
A
B
a
Fig
Y
M
X'
P'
P
X
H
A
Fig. 23 a.
Y
Y'
Y,
X'
O'
X,
b
a
O
X
X'
Y
O
X
Y,
Fig. 28.
N'
B
Y
N
A
M'
H
M
X,
P''
O
P
P'
X
N''
B,
M''
Y

Fig. 36.

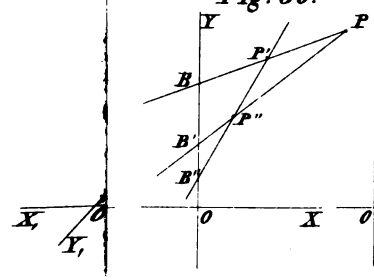


Fig. 37.

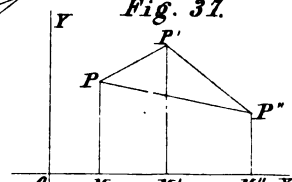


Fig. 42.

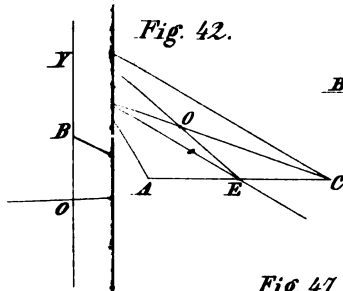


Fig. 43.

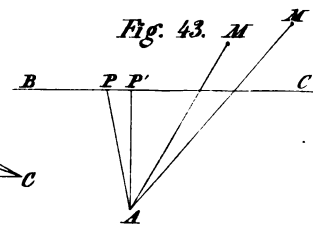


Fig. 47 a.

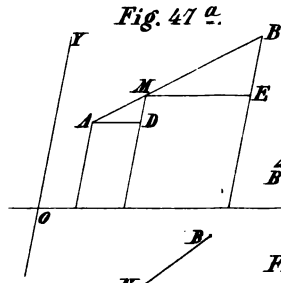
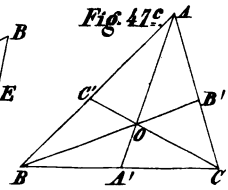
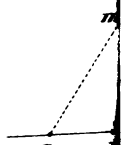


Fig. 47 c.





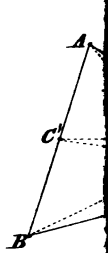


Fig. 47 b.

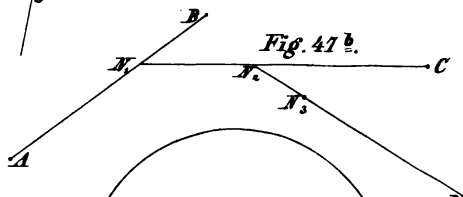


Fig. 48 f.

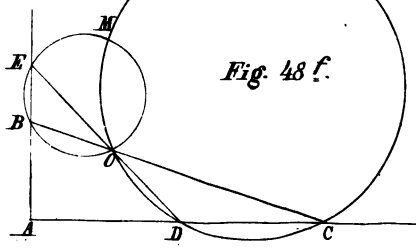


Fig. 54.

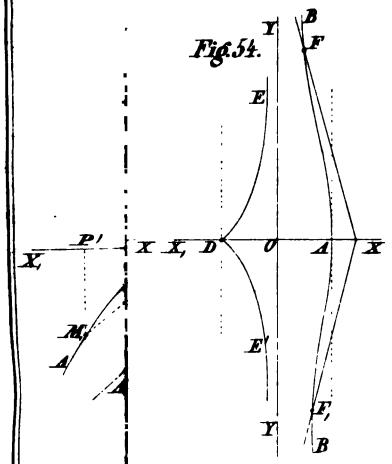


Fig. 55.

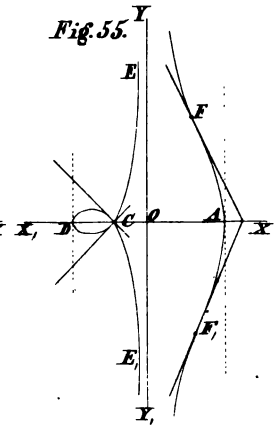


Fig. 59.

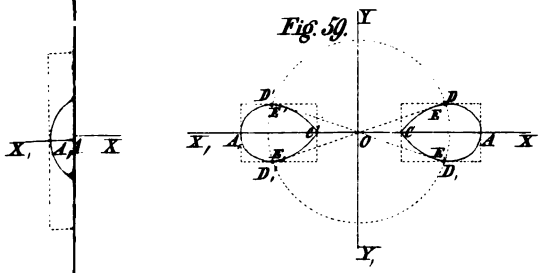
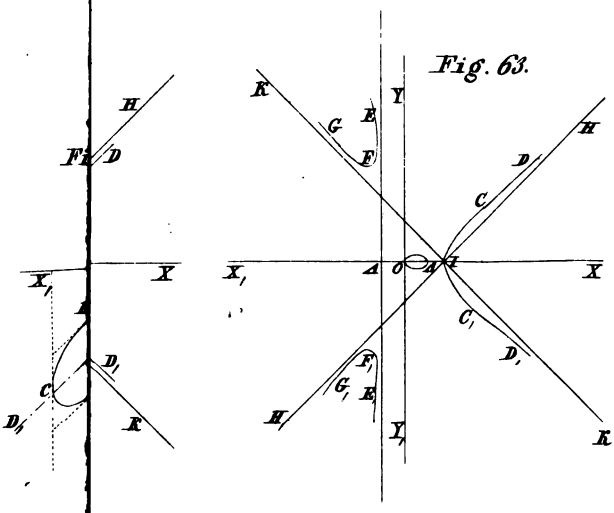


Fig. 63.



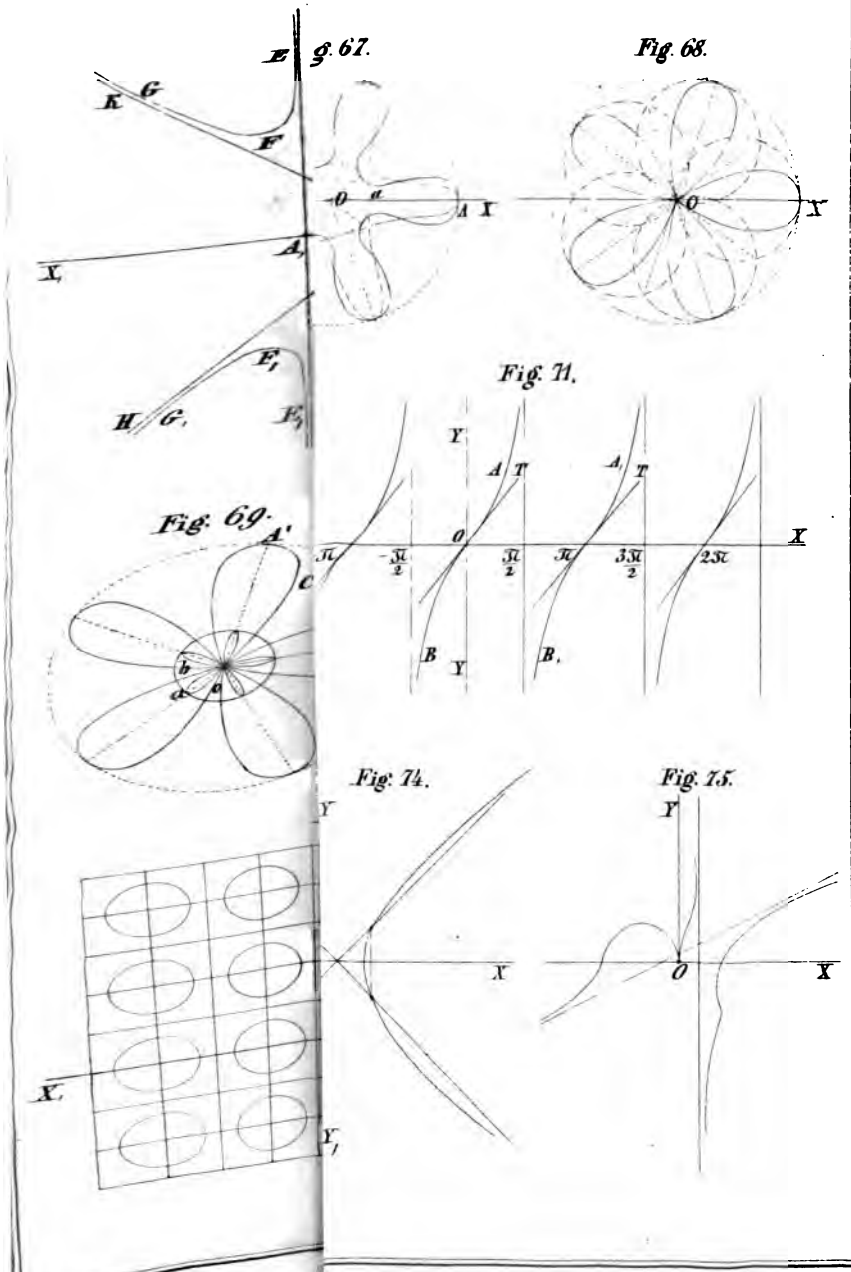


Fig. 67.
E
K
G
F
O
a
A
X
X,
A,
F,
H
G,
F,
Fig. 68.
O
X
Fig. 71.
Y
A
T
A,
T
O
X
π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
B
Y
B,
Fig. 69.
A'
C
b
a
c
Fig. 74.
Y
X
X,
Y,
Fig. 75.
Y
O
X

TAF. VI.

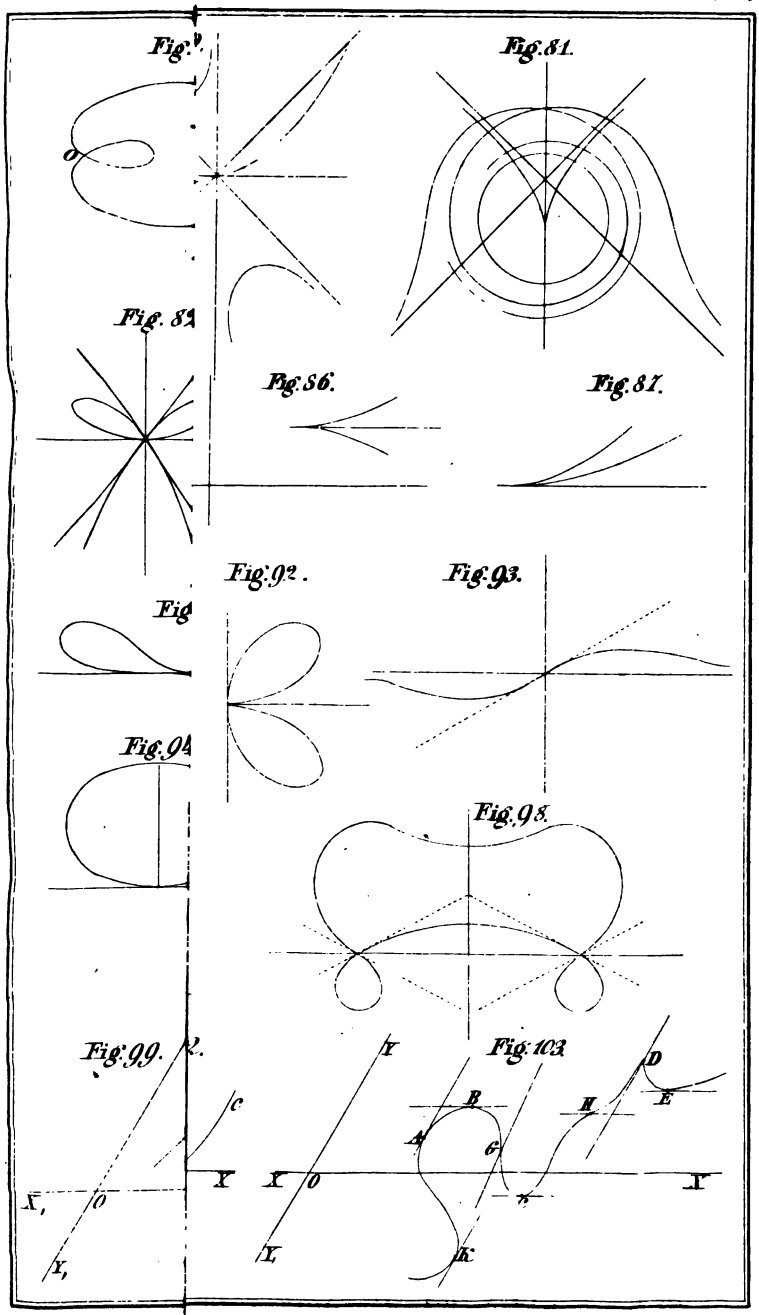


Fig. 81.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 103.
O
C
X
X,
O
Y,
Y
X
O
Y,
B
A
G
H
D
E
K

Fig. 107.

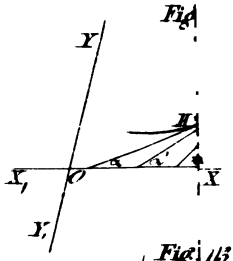


Fig. 108.

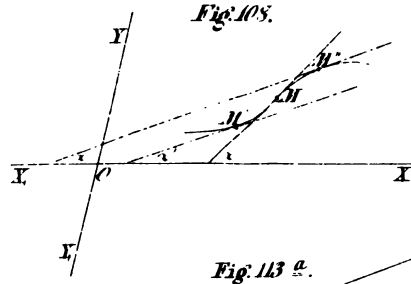


Fig. 113.

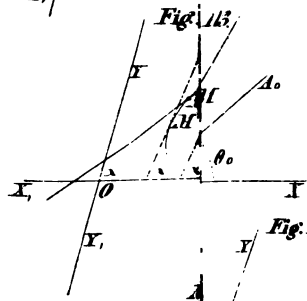


Fig. 113 a.

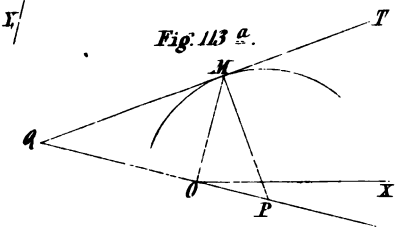


Fig. 114.

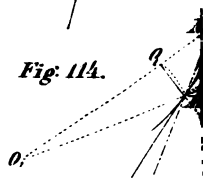


Fig. 118.

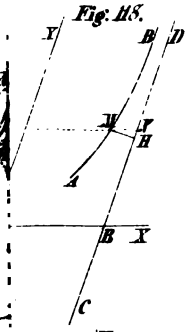


Fig. 119.

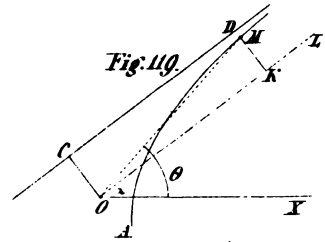


Fig. 120.

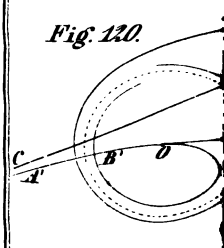


Fig. 121.

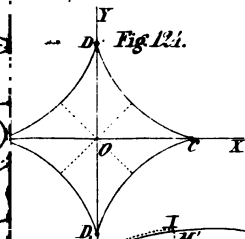


Fig. 125.

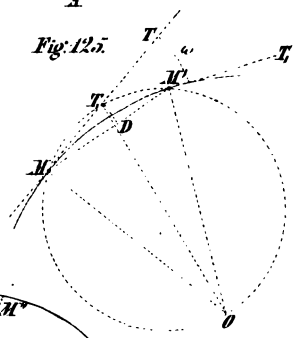


Fig. 126.

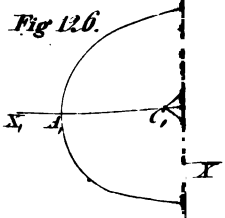


Fig. 129.

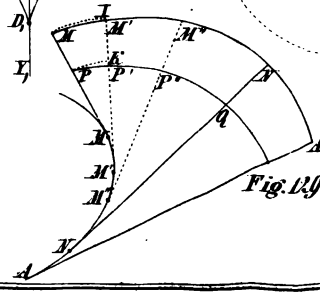


Fig. 169.

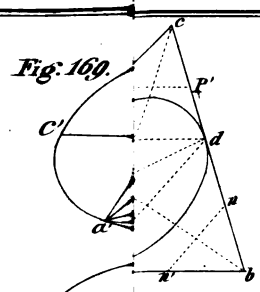


Fig. 172a.

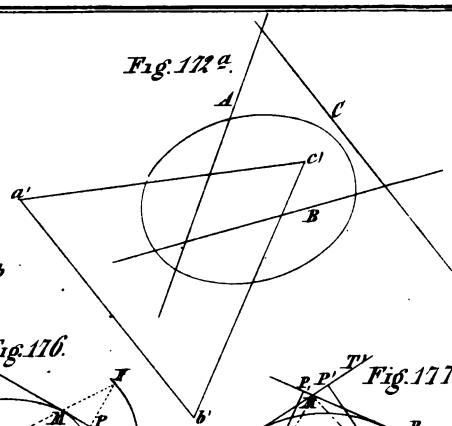


Fig. 173.

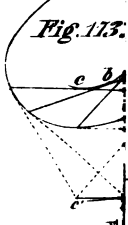


Fig. 176.

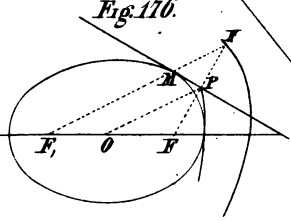


Fig. 177.

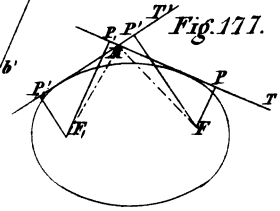


Fig. 178.

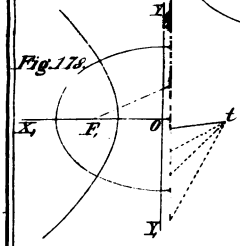
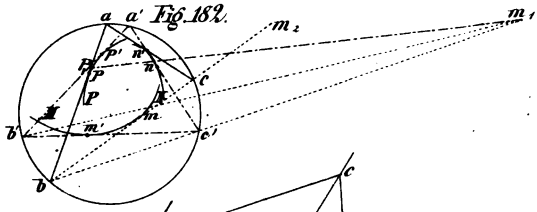


Fig. 182.



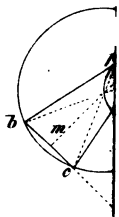


Fig. 186.

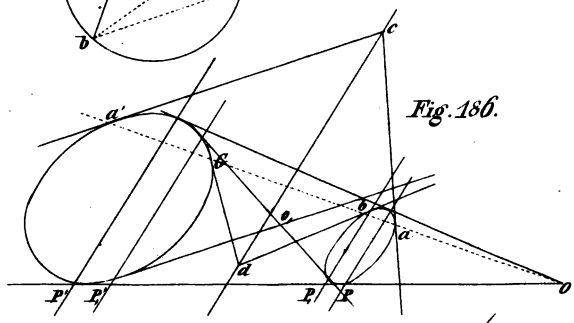


Fig. 191.

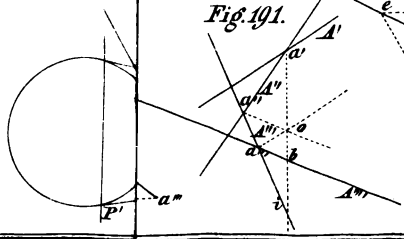
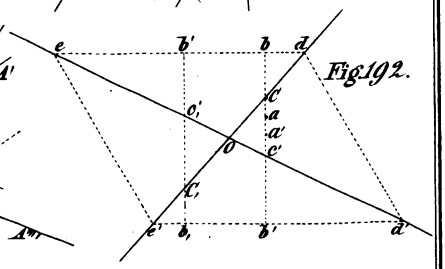
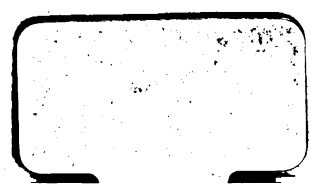



Fig. 192.